Sun Yat-sen Management Review
Vol.1, Number 1
September 1993

利益分配機制的特性與作法*
The Characteristics & Methods of Profit Sharing

張 玉 山 *Yue-Shan Chang*
國立中山大學財務管理系
Department of Financial Management
National Sun Yat-Sen University

吳 浚 郁 *Jim-Yue Wu*
國立中山大學企業管理研究所
Institute of Business Management
National Sun Yat-Sen University
(Received March 1993; Revised May 1993; Accepted June 1993)

摘　　要

當個人發現透由眾人合作，所能產生的利益大於其個別行動所得到的利益時，便會產生共同合作的誘因。由於共同合作時，每一個人可以根據比較利益原則，發揮自己的專長以達專業及分工的效果，所以可以增加全體成員的共同利益。同時，自全社會的觀點而言，透由合作行為，也可以使社會資源做更有效的運用，進而創造出更多的社會利益。

然而，共同合作行為能否產生，取決於合作利益的分配方式；因為透由合作所產生的利益往往具有共同生產的特性，所以合作利益也就無法明確的劃歸給個別的參與者。由於每個人都是以自利作為其行為動機，參與合作的目的乃是希望透過合作以增加個體的利益。因此利益分配的方式會影響到每一個成員參與合作的意願。如果分配的方式不合理，將可能會使得合作成員脫離合作團體而各自努力，或是另行形成較小的合作團體，這均會使集體的合作無法完全發揮效益，組織的運作也不能達於最有效率的狀態。因此，如何設計合理及有效率的利益的分配機制，乃是研究合作行為中極為重要的課題。

在本篇論文中，我們進一步對（合作）利益分配機的特性及具體作法作更深入的探討。我們在抽象的合作賽局理論之下，發展一套一般化且具體可行的分配模式，在此模式之下，參與合作的個體可以根據不同環境特性的要求，而能發展出相對可行的分配方法，以作為各團體在分配合作利益時的參考。

關鍵詞：利益分配、合作賽局理論、分配機制

ABSTRACT

Incentives for comperation among various parties originate from the gains created through their cooperation in the production process. The gains, however, through cooperation are hard to identify, sharing rules of gains are therefore, unclear. As each party is motivated by its self-interest, gain-sharing rules become the basis for their cooperation.

In this paper, by adopting the well-established cooperative game theory, we investigate workable gain-sharing rules. We develop a two-part tariff gain-sharing struture for various situation. One can easily adjust the parameters of sharing rule to meet one's own demand.

Keywords: gain sharing, cooperative game theory, allocation mechanism

*本文部份改寫自作之一吳浚郁的碩士論文，同時，國科會研究計畫（NSC-81-0301-H110-13）對本文的經費支持，在此致謝。

壹、前　言

由於人類的慾望無窮，因此致力於追求其效用的極大。當個人發現透由眾人合作，所能產生的利益大於其個別行動所得到的利益時，便會產生共同合作的誘因。由於共同合作時，每一個人可以根據比較利益原則，發揮自己的專長以達專業及分工的效果，所以可以增加全體成員的共同利益。同時，自全社會的觀點而言，透由合作行為，也可以使社會資源做更有效的運用，進而創造出更多的社會利益。

然而，共同合作行為能否產生，取決於合作利益的分配方式；因為透由合作所產生的利益往往具有共同生產的特性，所以合作利益也就無法明確的劃歸給個別的參與者。由於每個人都是以自利作為其行為的動機，參與合作的目的乃是希望透過合作以增加個體的利益。因此利益分配的方式會影響到每一個成員參與合作的意願。如果分配的方式不合理，將可能會使得合作成員脫離合作團體而各自努力，或是另行形成較小的合作團體，這均會使集體的合作無法完全發揮效益，組織的運作也不能達於最有效率的狀態。因此，如何設計合理及有效率的利益分配機制，乃是研究合作行為中極為重要的課題。

在文獻中，有關於合作利益分配的論著很多，有的以議價理論（Nash Bargaining Theory）的觀點來分析，有的從合作賽局理論（Cooperative Game Theory）的角度來研究，另一些則自實務層面來探討。

應用議價理論來研究利益分配的文獻有許多，包括勞動工資的決定，如：Svejnar(1986)， McDonald & Solow (1981)；佃農及地主農作分配份額的研究，如：Bell & Zusman(1976)；冒險合資（Joint Venture）的利益分享，如：Darrough & Stoughton(1989),自然資源發展的利益分享，如：Anandalingam (1987)‧‧‧‧等，都是以議價理論來探討合作利益分配的方式。

而另外一種對於合作利益分配的研究方向是採用合作賽局理論

的觀點。在此理論架構下，最常用的分配方式為夏普利值（Shapley Value）與核仁解（Nucleolus）；而這些方法也廣泛的應用於各種合作分配的情況。包括空氣污染管制，如：Bird & Kortanek（1974）；市內電話費率，如：Billera，Heath & Raanan（1978）；公營企業訂價，如：Littlechild (1970, 1974)；飛機起降費用，如：Littlechild & Thompson（1976,1977）；水資源發展計畫，如：Suzuki & Nakayama(1976)；公共投資訂價，如:Loehman & Whinston (1971)；在會計的領域中，也曾經利用此方法來作為成本分攤的機制，如：Shubik(1962)；Jensen (1977)；Hamlen，Hamlen & Tschirhart (1977)；Callen (1978)；Chang (1992)；除此之外還可以用來分析委員會中的權力分配,如：Shapley & Shubik (1954)，合併協議，如：Glasser(1958)，保險問題，如：Borch(1962,1968)‧‧‧‧等，都是合作賽局理論的應用。

在實務層面也有許多不同的論著討論有關如何設計合作利益分配機制，包括：績效獎金的分配模式，如：劉維琪，張玉山（民國80年）；促銷費用的分攤，如：張玉山（民國79年）；受管制的台灣公路客運業之報償分配，如：王國樑（民國77年）；年終獎金及分紅之研究，如馬凱，周添城和吳惠林（民國78年）‧‧‧‧等，都是自實務層面來討論有關於合作利益分配的方法。

雖然已有許多的論文討論過合作利益的分配方式，但是這些文獻或只是專注於抽象分配概念的探討，而無法得出具體可行的分配方式；或者只是為單一目的所設計的分配機制，而無法廣泛的應用於各種不同的情況之下；或者，僅自實務層面探討分配的方法，而缺乏適當的理論基礎。所以在本篇論文中，我們進一步對（合作）利益分配機制的特性及具體作法作更深入的探討。我們希望能在抽象的合作賽局理論之下，發展一套一般化且具體可行的分配模式，在此模式之下，參與合作的個體可以根據不同環境特性的要求，而能發展出相對可行的分配方法，以作為各團體在分配合作利益時的參考。

本文的結構共分成五節。在下一節（第二節）中，我們首先說明

符號的意義以及利益分配時所應具備的理想特性。在第三節中，我們探討當各個成員僅能單獨行動時，各種利益分配的方法，並進一步討論這些分配的方法所適用的情況及所滿足的性質。在第四節中，我們放鬆第三節中的假設進一步討論當所有合作同盟均為可能時，各成員間利益分配的方法。在本節中我們發展了一種新的分配方法（核心分配解），分析其特質並和合作賽局理論中常見的夏普利值與核仁解相比較。有關於本文可能的應用以及結論則列於第五節。

貳、利益分配的理想特性

一、合作行為的基本架構

在本節中，我們首先探討理想的利益分配方式所應具有的特性。要如何分配才算是理想的分配方法？這個問題顯然要根據很多不同的因素而定。例如：有多少人參與分配，每個人對於生產過程貢獻如何，或是這些人外在機會為何，成員間採行集體行動的可能性，‧‧‧‧等等。這些因素都可能會影響到最後分配的結果。所以在評估不同的分配方法之前，我們必需先要對理想利益分配模式的特性進行瞭解。因此，在本節中，我們將探討利益分配的一般性原則，以了解在分配共同利益的時候，理想分配方式所應具備的性質和特性，以做為設計合理分配方法的依據。為了說明的方便，我們將藉由一些符號來說明合作利益分配的問題。首先我們以$N=\{1,\ldots,n\}$代表所有參與合作者所成的集合，而1到n表示每個成員的代號。如果合作團體N內的參與者可以自由協調而形成一個較小的合作團體，則稱此小團體為集合N內的一個合作同盟（coaliation）。對於任何一個合作同盟S而言（其中$S\subseteq N$），透由同盟內成員的合作可以創造出的合作利益，我們以$V(S)$表之。我們稱$V(S)$為S的特徵函數（Characteristic Function）。$V(S)$表示合作同盟S的成員為了達成共同的目的所能創造出來的最大利益。因此，對於全體成員可組成的最大同盟N而言，$V(N)$代表全體成員共同合作時所能創造的最大利益；由於眾人合作的目的乃在追求

更大的利益。因此，在本文中，我們假設特徵函數，$V(S), S \subseteq N$，具有超可加性（Super-additivity）。易言之，我們假設特徵函數$V(S)$具有下列特性：

$$V(S)+V(T) \leq V(S \cup T) \qquad S \cap T = \Phi, \quad \text{且} S,T \subseteq N$$

對於某一利益分配的方式，我們可以符號$\zeta(\bullet)$表示。相對於某一特定的特徵函數V，其在此利益分配方式下的分配結果可以$\zeta(V) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$，其中$X_j$為第$j$個參與者所分配到的利益。在本節中我們將藉由上述的符號，探討合理分配方法所應具備特性，以作為評估各種合作利益分配方法的依據。

二理想的利益分配原則

有關於分配的原則，有許多的特性須需要加以考慮，除了要求分配的方法要具備公平性及效率性之外，同時也要考慮到合作成員間誘因問題，使同盟成員能夠為整個合作團體貢獻；所以一個理想的利益分配方式，至少應該滿足下列幾個特質：

(一)效率性（efficiency）

對於利益分配的方式，最基本的要求是要能夠把全體所創造的利益完全分配完畢。這個要求以數學式可表示為：

$$\sum_{i \in N} X_i = V(N)$$

(二)個人理性（individual rationality）

當個體參與合作以創造共同利益時，其最初的本意乃是希望透過共同合作以增加本身的利益。因此利益的分配，必須使個體所得到的利益比獨自行動時所得到的利益為大，否則此個體就不願參與合作。所以對於任何一個參與者而言，其合作後的利益分配，要能夠比不參與合作，獨自行動時所得到的利益為大。此項利益分配的特性，為確保合作團體內的各個成員願意參與合作之必要條件，而這樣的想法可

以數學式表示為：

$$X_i \geq V(\{i\}) \quad , \quad 對所有之 \quad i \in N$$

㈢利益增添原則

當合作團體願意讓某一個成員加入此合作團體時，則表示此成員的加入對於合作團體的利益有所幫助，否則此合作團體不會同意這個成員的加入。所以對於合作團體的任何一個成員而言，為了不讓此成員的分配而損及其他成員所組成合作團體的利益，而產生成員間交叉補貼的現象，所以每個參與者的分配不得大於此成員加入合作團體時，所產生的邊際貢獻，所以根據此說法，如果定義每個成員的邊際貢獻為：

$$M(\{i\}) = V(N) - V(N - \{i\})$$

則利益增添原則可表示為：

$$X_i \leq M(\{i\}) \quad , \quad 對所有之 \quad i \in N$$

㈣同盟理性（coaliation rationality）

適當的利益分配方法，除了要能夠使參與合作的經濟個體不會片面地脫離合作團體之外，也不希望群體中的成員，經由協議而形成較小的合作同盟，而能片面的增加小同盟的利益，同時使得整個合作團體的利益受到損害。因此對於合作團體中的任一小同盟而言，其參與者所分得的利益總合，不應小於這些參與者直接結成同盟，而所能創造出來的利益；我們稱這個性質為同盟理性。可以進一步用數學式表示為：

$$\sum_{i \in S} X_i \geq V(S) \quad , \quad 對所有之 \quad S \subseteq N$$

滿足上述四個性質的解，在合作賽局理論（cooperative game theory）中稱為核心解（core solution），為一個穩定的利益分配方式所必須具備的基本條件。由於滿足核心解的點往往不是唯一的，所以我們可以把所有滿足核心解的點稱為核心集合。核心解的經濟意義為：

1. 所有的利益都已經分配完畢，並不存在有可以改善一方的利益。而不使其他成員的利益受到傷害的機會，所有可以增進雙方面利益的機會都已經用盡，因此核心解也必然達成巴萊圖最適境界（Pareto Optimality）。
2. 每一個人參與合作時，所得到利益都會比給獨自動時所得到的利益還要大，參與合作將更能改善自己的處境，所以每一個人均不會有脫離同盟而單獨行動的意願。
3. 對於每一個成員而言，其所分配到的利益都不會大於此成員的邊際貢獻，所以對於合作團體而言，其所能分配的利益並不會因為某個新成員的加入而減少，成員間互相補貼的現象不會發生。
4. 因為滿足同盟理性之故，合作同盟內的成員並沒有誘因藉著形成較小團體之方式，脫離共同合作的狀態而獨自生產。

當利益分配滿足上述四項條件情況時，因為並不存在另外其他的獲利機會，所以合作的狀態將會十分的穩定。因此，上述條件確實是一個穩定利益分配方式的必要條件。然而，一個合理的分配方式，除了應滿足上述核心解集合的限制外，還有一些其它的性質也是理想分配方式應具備的理想條件，我們將這些特質簡述如下：

㈤虛位競局者（dummy player principle）

對於任何合作的參與者而言，有時候可能很難辨別出個人對於此合作貢獻的大小，但是有一個明顯的利益分配原則：如果對於利益的增加沒有貢獻者，就不能分享利益增加的好處，這個性質稱為「虛位競局者原則」，我們可以將這個觀念進一步以數學式表示為：

$$\text{若} \quad V(SU\{i\}) = V(S) \quad i \in N \quad \text{且} \quad S \subseteq N, \quad \text{則} \quad X_i = 0$$

同時，對於合作成果沒有額外貢獻的參與者，則應該只能分享其獨自行動所能得到的利益，這個觀念可以以數學式可表示為：

如果$V(N)-V(N-\{i\})=V(\{i\})$　　$i\in N$

且$V(SU\{i\})=V(S)+V(\{i\})$　對所有的$S\subseteq N$

則$X_i=V(\{i\})$

(六)單調性（monotonicity）

對於每一個合作參與者而言，如果某個合作參與者的營運效率提高，而使共同利益增加時，這時候該參與者所應該分得的利益應該增加或不變，否則將會打擊參與者對於增加合作績效的意願。所以單調性的意義是指如果合作成員所屬團體的合作利益增加時，則分配給每一位合作參與者的利益不應該減少；此種想法，以數學式可表示為：

對於二個特徵函數$\overline{V}$、V而言

若$\overline{V}(N)>V(N)$　且　$V(S)=\overline{V}(S)$　　如果$S\subset N$

則$X_i(\overline{V})\geq X_i(V)$　　　對所有的$i\in N$

在本節中，我們探討了當眾人合作時，合理利益分配方法所應具備的基本特性。我們介紹了效率性、個人理性、同盟理性、利益增添、虛位競局者原則及單調性等理想特質。在下一節中，我們將利用一個簡單的架構來說明各種分配的方法，並且利用本節中所介紹的特性，來檢驗各種利益分配方法的性質，以作為團體合作時利益分配的參考。

參、合作利益分配的模式及其特性

在本節中我們將發展一套合作利益分配的具體模式；由於不同的分配方法有不同的分配結果與特性，所以我們必須瞭解各種分配方法的具體作法與其所滿足的特性。使每一個團體能針對自己的需要，設計出適當的分配方法，以滿足合作成員的要求。

一、合作利益的分配模式

對於利益分配的方法，在理論及實務上有各種不同的方式，在本文中，我們介紹一個利益分配的一般性架構，合作團體可依據不同特

性的需要，而加以調整。首先，我們可以把每一個參與者可分到的利益區分成兩個部份：

$$X_i = b_i + r_i \cdots\cdots\cdots (3.1) \qquad i \in N$$

其中b_i稱為第i個參與者所能分配到的「基本利得」，表示合作參與者加入合作時，所得到的基本額度，而r_i稱為第i個成員所能分配到的「剩餘利得」，表示除了「基本利得」外，每一個成員所能再分得的利益。因此對於合作團體而言，支付所有成員「基本利得」的數額（定義為B）為：

$$B = b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n$$

所以在滿足效率性的原則下，所有成員所能分配的「總剩餘利得」（以R表示），則應滿足下列關係：

$$R = r_1 + r_2 + \cdots\cdots + r_n = V(N) - \sum_{i \in N} b_i$$

因此如果R大於零，則每個成員所能分配的剩餘利得為正，而如果R小於零，則每一個成員必須支付一些所得（剩餘利得為負），以補足總基本利得不足的部份。

若每個成員對於總剩餘利得的分配進一步採用權數（線性）的方式來分配，則(3.1)式可進一步表示為：

$$X_i = b_i + w_i \times \left[V(N) - \sum_{i \in N} b_i\right]$$

其中wi為第i個成員參與合作時，對於剩餘利得所分得的比例。在本文中，我們將根據不同的需要，透由不同b_i及w_i的設定方式而得到不同的分配方法。由於個人片面的採取行動，遠比合作團體內部份成員採取集體行動來的容易。同時，在某些合作團體內，制度性的因素也限制了成員間的聯合行為（註一），因此，在本節中我們首先探討合作利益分配的一個特例。我們假設由於受到制度性因素的影響，合作團體中的成員僅能片面地行動，而無法採行聯合的行為。在

此種情況下，我們探討適當的基本利得(b_i)以及分配權數 (w_i)的設定方式。而在下一節（第四節）中，我們將放寬此一假設，進一步分析成員間各種同盟均可能的情況。

㈠基本利得可能的設定方式

1. 每一個成員都沒有基本利得（基本利得為零）

如果我們希望每一個成員都在同等的地位下進行分配，而不考慮每一個成員參與合作時所放棄的機會成本的大小，也不考慮每一個成員對於合作團體的邊際貢獻大小，則每一個參與者的基本利得便可設定為零。

$$b_i = 0 \qquad \text{對所有的} i \in N$$

2. 基本利得為該成員獨自行動時所能得到的利得

如果合作的分配是希望使得每一個參與合作的成員所得到的利益都能比以前好，而不會有脫離合作團體的意願，則每一個成員所得到的利益必須大於它本身所放棄的機會成本。因此必須先分配給每一個成員獨自行動所能得到的利益。在此種理念下，每一個成員的基本利得可設定為：

$$b_i = v(\{i\}) \qquad \text{對所有的} i \in N$$

而此時，合作團體的總剩餘利得為$V(N) - \sum_{i \in N} V(\{i\})$。由於我們假設合作的特徵函數 $V(\bullet)$具有超可加性，因此，此時合作團體之剩餘利得必然為正。

3. 基本利得為該成員參與合作時對於團體利益的邊際貢獻

如果合作的分配是非常重視個人對於合作的邊際貢獻的大小，希望對於合作團體有較大邊際貢獻的成員能得到較大的基本利得，則可以把每一個成員對於合作團體的邊際貢獻設定為其基本利得。亦即：

$$b_i = M(\{i\}) \qquad i \in N$$

而此時的剩餘利得為$V(N)-\sum_{i\in N}M(\{i\})$，若核心解存在的話，團體的剩餘利得必然為負（註二）。

以上所介紹的基本利得分配方式為一般較常採用的基本利得分配方式。而除了基本利得外，每一個成員又可以以某一個比例來分配團體的剩餘利得，所以我們接著介紹分配比例的設地定方式。

㈡剩餘利得分配權數的決定方式

1. 每一個成員都佔相同的分配權數

對於團體總剩餘利得的分配方式，如果不考慮每一個成員所放棄的機會成本的大小以及其對合作團體的邊際貢獻程度，而對合作團體內的成員均以相同的方式對待。此時，每一個成員分配的比例可設定為$\frac{1}{|N|}$（其中$|N|$為合作同盟N的參與者個數），因此對於個人剩餘利得的分配比例為：

$$w_i=\frac{1}{|N|} \qquad \text{對所有的} i\in N$$

2. 以成員獨自行動時所能得到的利益做為分配的基礎

如果對於剩餘利得的分配方式是以個別成員獨自行動時所能創造的利益為基礎。那麼就必須以每一個成員獨自行動創造出來的利益大小做為分配權數的依據。所以，此時每一個成員的分配權數可因而設定為：

$$w_i=\frac{V(\{i\})}{\sum_{i\in N}V(\{i\})} \qquad \text{對所有的} i\in N$$

3. 以成員對於整個合作團體的邊際貢獻大小作為分配權數的基礎

如果我們希望參與者對於合作團體的邊際貢獻越大時，則其所能分配到的剩餘利得也就越大，則此時就可以每一個成員的邊

際貢獻大小作為分配權數的依據，所以每一個成員對於剩餘利益的分配比例為：

$$w_i = \frac{M(\{i\})}{\sum_{i\in N} M(\{i\})} \qquad \text{對所有的} i \in N$$

4. 以參與合作時所多創造出來的淨利益作為分配的權數

當每一個成員獨自行動時，其本身所能創造出來的利益為$V(\{i\})$，而如果加入合作團體時，則此成員所能創造出來的利益為$M(\{i\})$，所以對對於此參與者而言，從獨自行動到參與合作時，所多增加創造的淨利益為$M(\{i\}) - V(\{i\})$，因此如果以此增加的淨利益部份作為分配的權數，則此時每一個成員對於剩餘利得的分配權數為：

$$w_i = \frac{M(\{i\}) - V(\{i\})}{\sum_{i\in N} \left[M(\{i\}) - V(\{i\})\right]} \qquad \text{對所有的} i \in N$$

根據上面所介紹的基本利得分配方法與剩餘利得分配權數的決定方式，我們可以整理成12種的利益分配方式。我們將這12種方法列於〔表一〕，並簡單說明於後：

$$\text{第一種為} X_i = \frac{1}{|N|} \times V(N)$$

表示只要任何成員參與合作，就可以均分合作團體所創造的利益，所以第一種方式又稱為均等分配方法（Egalitarian Method）

$$\text{第二種為} X_i = \frac{V(\{i\})}{\sum_{i\in N} V(\{i\})} \times V(N)$$

此種合作利益的分配方式是依造自己所未參與合作時每一個成員所能得到的利益大小做為合作後總利益分配比例的根據，因此對於所有參與者而言，參與合作前與參與合作後，每一個成員相對於其他成員所分得的比例並沒有改變。

$$\text{第三種為} X_i = \frac{M(\{i\})}{\sum_{i\in N} M(\{i\})} \times V(N)$$

〔表一〕：不同的基本利得與分配權數所組合成利益分配的情形

權數 / 基本利得	$\frac{1}{\lvert N\rvert}$	$\frac{V(\{i\})}{\sum_{i\in N} V(\{i\})}$	$\frac{M(\{i\})}{\sum_{i\in N} M(\{i\})}$	$\frac{M(\{i\})-V(\{i\})}{\sum_{i\in N}\left[M(\{i\})-V(\{i\})\right]}$
0	第一種	第二種	第三種	第四種
	第五種	第六種	第七種	第八種
	第九種	第十種	第十一種	第十二種

此種合作利益的分配方式是以每一個成員對於合作團體的邊際貢獻大小作為總利益分配的比例，因此對於合作團體有較大的邊際貢獻時，其所能得到的利益也就愈大。

$$\text{第四種為} X_i = \frac{M(\{i\})-V(\{i\})}{\sum_{i\in N}\left[M(\{i\})-V(\{i\})\right]} \times V(N)$$

此時，每個成員都沒有得到基本利得，而對於總利益的分配方式是採取對於參與合作前與參與合作後所增加的淨利益做為分配的比例，也就是如果自己所能創造的淨利益愈大時，則於總利益中所能分配的利益也就愈大。

$$\text{第五種為} X_i = V(\{i\}) + \frac{1}{|N|} \times \left[V(N) - \sum_{i\in N} V(\{i\})\right]$$

此時每一個成員參與合作時，可以先分得自己為參與合作時所放棄的機會成本，而對於剩餘利益的分配則採取平均分配的方式，只要參與合作就可以分得均等的剩餘利益。也就是說，以均等的方式來分

配因合作而產生的利益。

$$\text{第六種為}X_i = V(\{i\}) + \frac{V(\{i\})}{\sum_{i\in N} V(\{i\})} \times \left[V(N) - \sum_{i\in N} V(\{i\})\right]$$
$$= V(\{i\}) + \frac{V(\{i\})}{\sum_{i\in N} V(\{i\})} \times V(N) - V(\{i\})$$
$$= \frac{V(\{i\})}{\sum_{i\in N} V(\{i\})} \times V(N)$$

所以此種分配方式與第二種分配方式相同。

$$\text{第七種為}X_i = V(\{i\}) + \frac{M(\{i\})}{\sum_{i\in N} M(\{i\})} \times \left[V(N) - \sum_{i\in N} V(\{i\})\right]$$

此時每一個成員以所放棄的機會成本為其基本利得，而剩餘利益的分配方式則以其對於合作團體貢獻的大小為基礎，也就是說如果對於團體的邊際貢獻愈大時，則其所能分配到的剩餘利得也就愈大。

$$\text{第八種為}X_i = V(\{i\}) + \frac{M(\{i\}) - V(\{i\})}{\sum_{i\in N} \left[M(\{i\}) - V(\{i\})\right]} \times \left[V(N) - \sum_{i\in N} V(\{i\})\right]$$

此時每一個成員以自己獨自行動所能得到的利益為基本利得，對於剩餘利得的分配方式則是以其對於合作團體的淨貢獻作為分配的權數。而此種分配方式和Galely(1974) 所提出的均等擾亂傾向（Equal Propensity to Disrupt）的分配方式完全相同（註三）。

$$\text{第九種為}X_i = M(\{i\}) + \frac{1}{|N|} \times \left[V(N) - \sum_{i\in N} M(\{i\})\right]$$

此時每一個成員參與合作時，可以先分的對於整個合作團體的邊際貢獻，而對於總利益不足的部份，則採取相等的分配方式，同等地由所有合作參與者來負擔。

$$\text{第十種為}X_i = M(\{i\}) + \frac{V(\{i\})}{\sum_{i\in N} V(\{i\})} \times \left[V(N) - \sum_{i\in N} M(\{i\})\right]$$

此時每一個成員以其對合作團體的邊際貢獻為基本利得，而對於利益不足的部份，則是以自己所放棄的機會成本大小為分攤依據。也

就是說如果自己所放棄的機會成本愈大，則必須負擔的數額也就愈大。

$$
\begin{aligned}
\text{第十一種為} X_i &= M(\{i\}) + \frac{M(\{i\})}{\sum_{i\in N} M(\{i\})} \times \Big[V(N) - \sum_{i\in N} M(\{i\})\Big] \\
&= M(\{i\}) + \frac{M(\{i\})}{\sum_{i\in N} M(\{i\})} \times V(N) - M(\{i\})\Big] \\
&= \frac{M(\{i\})}{\sum_{i\in N} M(\{i\})} \times V(N)
\end{aligned}
$$

此種分配方式與第三種分配方式相同。因此，我們也可看出此兩種方法（第三及第十一種方法）均是以成員的邊際貢獻為基本利得，並以邊際貢獻為基礎來分攤剩餘利益。

$$
\text{第十二種為} X_i = M(\{i\}) + \frac{M(\{i\}) - V(\{i\})}{\sum_{i\in N}\Big[M(\{i\}) - V(\{i\})\Big]} \times \Big[V(N) - \sum_{i\in N} M(\{i\})\Big]
$$

此時每一個成員以各成員的邊際貢獻作為基本利得，而對於利益不足的部份（剩餘利得）則是以每一個成員的支付意願（willingness to pay）（註四）為分攤的基礎。因此如果參與者的支付能力愈大時，所必須負擔的數額也就愈大。

二合作利益的分配方法的檢定

上一小節中，我們介紹了各種的利益分配方法，在本小節中，我們將進一步探討各種分配方法所具備的特性，以作為選擇分配方法的依據。

㈠ 由於特徵函數具有超可加性，因此，$\sum_{i\in N} V(\{i\}) \le V(N)$。所以，當利益分配的方式，以 $V(\{i\})$ 為基本額時，合作團體的剩餘利益 $\Big(V(N) - \sum_{i\in N} V(\{i\})\Big)$ 必然為正。因此，無論以何種權數來分配剩餘利益，利益分配的結果必會滿足「個人理性」的特性，$X_i \ge V(\{i\})$。所以，〔表一〕中的第五、六、七、八種利益分配分式必然會滿足「個人理性」的要求。

㈡ 同樣的，若核心解存在的話，則$\sum_{i\in N} M(\{i\}) \geq V(N)$此時，利益分配的方式若以$M(\{i\})$為基本額，合作團體的剩餘利得，$\left(V(N)-\sum_{i\in N} M(\{i\})\right)$，必然為負。因此，無論以何種方式來分配剩餘利得，利益分配的結果必然會滿足「利益增添原則」，$X_i \leq M(\{i\})$。所以，〔表一〕中的第九、十、十一、十二種利益分配的方式必然會滿足「利益增添原則」。

㈢ 由於「單調性」要求當團體合作的利益，$V(N)$，上升時，合作成員所分配的利益亦隨之上升或不變。所以，利益分配的基準應要和$V(N)$的數額無關。因此，以零或是$V(\{i\})$為基本額，且以$\frac{1}{|N|}$或$\frac{V(\{i\})}{\sum_{i\in N} V(\{i\})}$為權數的分配方式，如：第一、二、五、六、種方法，將可滿足單調性的要求。

㈣ 若第i位成員為一虛位競局者，則$M(\{i\}) = V(N) - V(N-\{i\}) = V(\{i\})$。若此時，以$\frac{M(\{i\})-V(\{i\})}{\sum_{i\in N}\left[M(\{i\})-V(\{i\})\right]}$作為總剩餘利得的分配權數，虛位競局$i$的權數必將為零，$i$將只能領到基本利得。因此，以$M(\{i\})$或$V(\{i\})$為基本利得，且以$\frac{M(\{i\})-V(\{i\})}{\sum_{i\in N}\left[M(\{i\})-V(\{i\})\right]}$為剩餘利得的分配權數的利益分配方式，如：第八及第十二種分配方法，將可滿足虛位競局者的要求。

㈤ 由於，我們假設核心解存在，且特徵函數具有超可加性，因此，$\sum_{i\in N} M(\{i\}) \geq V(N)$。

$$\left[V(N)-\sum_{i\in N} V(\{i\})\right] \leq \left[\sum_{i\in N} M(\{i\})-\sum_{i\in N} V(\{i\})\right] = \sum_{i\in N}\left[M(\{i\})-V(\{i\})\right]$$

第八種利益分配的方法可表為：

$$X_i = V(\{i\}) + \frac{M(\{i\})-V(\{i\})}{\sum_{i\in N}\left[M(\{i\})-V(\{i\})\right]} \times \left(V(N)-\sum_{i\in N} V(\{i\})\right)$$

$$X_i \leq V(\{i\}) + \frac{M(\{i\})-V(\{i\})}{\sum_{i\in N}\left[M(\{i\})-V(\{i\})\right]}\left[\sum_{i\in N} M(\{i\})-V(\{i\})\right]$$

$$= M(\{i\})$$

因此，我們可以推論第八種利益分配的方法可以滿足遞增性的要求。

㈥ 第九種利益分配的方法可表為：

$$
\begin{aligned}
X_i &= M(\{i\}) + \frac{1}{|N|}\Big[V(N) - \sum_{i\in N} M(\{i\})\Big] \\
\text{若}\quad \overline{V}(N) &= V(N) + K \\
\text{則}\quad \overline{V} &= \overline{M}(\{i\}) + \frac{1}{|N|}\Big[\overline{V}(N) - \sum_{i\in N} \overline{M}(\{i\})\Big] \\
\text{由於}\,\overline{M}(\{i\}) &= \overline{V}(N) - \overline{V}(N-\{i\}) \\
&= V(N) + K - V(N-\{i\}) \\
&= M(\{i\}) + K \\
\text{所以}\,\overline{X}_i &= M(\{i\}) + K + \frac{1}{|N|}\Big([V(N)+K] - [\sum_{i\in N} M(\{i\}) + K]\Big) \\
&= M(\{i\}) + \frac{1}{|N|}\Big[V(N) - \sum_{i\in N} M(\{i\})\Big] + \frac{K}{|N|} \\
&= X_i + \frac{K}{|N|}
\end{aligned}
$$

因而，$\overline{X}_i \geq X_i$。所以，第九種分配的方式滿足單調性的要求

㈦ 最後，因為特徵函數滿足超可加性，所以 $\sum_{i\in N} V(\{i\}) \leq V(N)$

$$
\begin{aligned}
\text{因此}\quad \Big[V(N) - \sum_{i\in N} M(\{i\})\Big] &\geq \Big[\sum_{i\in N} V(\{i\}) - \sum_{i\in N} M(\{i\})\Big] \\
&= \sum_{i\in N}\Big[V(\{i\}) - M(\{i\})\Big]
\end{aligned}
$$

由於，第十二種分配的方法可表為：

$$
\begin{aligned}
X_i &= M(\{i\}) + \frac{M(\{i\}) - V(\{i\})}{\sum_{i\in N}\big[M(\{i\}) - V(\{i\})\big]}\Big[V(N) - \sum_{i\in N} M(\{i\})\Big] \\
&= M(\{i\}) + \frac{M(\{i\}) - V(\{i\})}{\sum_{i\in N}\big[M(\{i\}) - V(\{i\})\big]}\sum_{i\in N}\Big[V(\{i\}) - M(\{i\})\Big] \\
&= V(\{i\})
\end{aligned}
$$

因此，可推論，$X \geq V(\{i\})$，第十二種利益分配的方式必然可滿足個人理性的原則。

綜合上述(一)至(七)點的討論，我們可將各整種利益分配方式所具有之特性，整理於〔表二〕。

〔表二〕：利益分配方式與特性

特性 分配方式	個人理性	利益增添	同盟理論	虛位競局者	單調性
第 一 種	×	×	×	×	○
第二(六)種	○	×	×	×	○
第三(十一)種	×	○	×	×	×
第 四 種	×	×	×	×	×
第 五 種	○	×	×	×	○
第 七 種	○	×	×	×	×
第 八 種	○	○	×	○	×
第 九 種	×	○	×	×	○
第 十 種	×	○	×	×	×
第 十二 種	○	○	×	○	×

在〔表二〕中，我們發現若干有趣的現象，分別補充如下：

(八) 由於基本利得以及分配權數設定時，並沒有考慮成員間形成各種同盟的可能性，因此，本節所討論的分配方法均不能滿足同盟理性的要求。

(九) 本節所討論的分配方法對訊息的要求很低。依不同分配方法的要求，合作團體僅需要掌握各別成員的邊際貢獻及（或）機會

成本，便可以進行相對的利益分配。由於分配方式十分簡單明確且易於實行，因此具有相當的實用價值。

(十) 第八種及第十二種分配的方式可以滿足較多的理想特性，在現實生活中，也可發現較多方法的實際應用。其中，第八種方法應用於美國印第安納州電力系統開發成本的分配，而第十二種方法則為美國田納西水利局分攤水利系統成本的方法。

在本節中，我們首先討論了，當合作成員僅能片面行動時，合作利益的分配機制。透由不同分攤標的物之選擇，我們發展出可滿足不同特性的分配規則。同時，本節中所發展的分配模式，十分簡單明確。對資訊的要求也很低，相當具有實用的價值，由於每個合作團體本身的條件以及所受到之限制不同，各個合作團體宜針對本身的需求，選擇適當的利益分配機制，以作為團體合作的基礎。

在本節中，我們並未考慮合作團體的成員間採行各種聯合行為的可能性，所以本節中所發展的利益分配方式，自然不能滿足集體理性的要求。因此，我們有必要針對團體中成員形成各種同盟的情況加以考慮，並在本文的分配架構下，發展適當的分配規則。

三利益分配模式與納許議價解

在上小節中，我們利用基本利得與額外利得的設定，而發展出一套利益分配模式。我們進一步以納許議價理論的觀點來討論此一利益分配模式，以了解其經濟意義。為了說明的方便，我們將藉用一的簡單的模式來說明。

假設在兩人的談判賽局中，S代表所有可能之合作成果所成的集合，$a=(a_1,a_2)$稱為代表兩人在完全不合作下，各自所得到的結果，我們稱$a=(a_1,a_2)$為協議破裂點（disaggrement point），而且$X=(X_1,X_2)$，則表示兩人在合作的情況下，其中的某一種利益分配的結果。Nash證明在滿足某些特定條件下，這兩人議價賽局，必定有唯一的議價解；這個解恰好可使下列函數值為極大：

Max : $g(X_1, X_2) = (X_1 - a_1)(X_2 - a_2)$

s.t.: $(X_1, X_2) \in S$

以此方法得到的解，為兩人賽局且雙方具有對等地位的議價解。而 Harsanyi & Selten 把此模式擴至N人，且議價者具有不完全議價能力的一般化納許議價解，透過公理的推論， Harsanyi & Selten得到每一個成員所分配的結果恰為求下列函數的極大化解：

$$\text{Max } g(X_i) = \prod (X_i - a_i)^{\alpha_i}$$

$$\text{s.t.}(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) \in S$$

$$\sum_{i \in N} \alpha_i = 1$$

其中 $X = (X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$為每一個成員所得到的議價解

$a = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$為每一個成員的協商破裂點

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n)$為每一個成員的議價能力

根據議價理論，我們也可以採用此一般化的Nash議價解來分配團體成員間合作利益。在本文的架構下，每一個成員不參與合作所能得到的利益為$V(\{i\})$，且團體合作所產生的總利益為$V(N)$，因此由納許議價理論可知納許議價解應滿足：

Max $g(X_1) = \Pi \left(X_i - V(\{i\})\right)^{\alpha_i}$

s.t. $\sum_{i \in N} X_i = V(N)$

我們可以利用拉氏乘數法（Lagrange Multipler）求解：

$$£\ (X_i, \lambda) = \prod \left(X_i - V(\{i\})\right)^{\alpha_i} - \lambda\Big(\sum_{i \in N} X_i - V(N)\Big)$$

由上式的一階條件可推論得：

$$\frac{X_1 - V(\{1\})}{\alpha_1} = \frac{X_1 - V(\{2\})}{\alpha_2} = \cdots\cdots = \frac{X_1 - V(\{n\})}{\alpha_n}$$

$$\text{且} \quad X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n = V(N)$$

$$\text{所以}\quad X_i - V(\{i\}) = \frac{\alpha_i}{\sum_{i\in N}\alpha_i} \times \Big[V(N) - \sum_{i\in N} V(\{i\})\Big]$$
$$X_i = V(\{i\}) + \frac{\alpha_i}{\sum_{i\in N}\alpha_i} \times \Big[V(N) - \sum_{i\in N} V(\{i\})\Big]$$

根據上述的推論，我們發現納許議價解的分配結果與上一小節中所採用的第五、六、七、八種分配方式是相同的，此時的分配為基本利得$V(\{i\})$，而以議價能力α_i作為分配剩餘利益大小的權數。不同的議價能力的選擇，可以得到不同的分配方法與特性。例如：如果我們以每個人放棄的機會成本作為每一個成員的議價能力，則此時的分配方法為第六種分配方式，透由上節的討論，我們知道此種分配方式可以滿足個人理性與單調性。

如果談判的過程中，每一個成員所放棄的機會成本已經被視為沉沒成本，所以，此時每一個成員所關心的不是淨利益的大小，而是每一個成員所得到的總利益的大小（註四），則此時可以將納許議價解改寫成下列的問題：

$\text{Max } g(X_i) = \prod X_i^{\alpha_i}$

$\text{s.t. } \sum_{i\in N} X_i = V(N)$

我們可以利用拉氏乘數法求解：

$$£\,(X_i,\lambda) = \prod X_i - \lambda\Big(\sum_{i\in N} X_i - V(N)\Big)$$

所以在滿足一階條件可推論得：

$$\frac{X_1}{\alpha_1} = \frac{X_2}{\alpha_2} = \cdots\cdots = \frac{X_n}{\alpha_n}$$

且$X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n = V(N)$

$$X_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{i\in N}\alpha_i} \times \Big[V(N)\Big]$$

所以此時的分配方法和模式中的第一、二、三，四種的分配方式相同，每一個成員所得到的基本利得為零，而所得到的利益完全決定於議價能力的大小。

而此時分配結果的性質也可從上一小節的討論中得知。例如：如果直接以個別成員所放棄的機會成本作為其議價能力的大小，則此時的分配結果會與分配模式中的第二種分配方式完全相同，可滿足個人理性與單調性的要求。

如果以合作團體的觀點而言，每一個成員加入合作團體時，所考慮的因素為其對於合作團體淨貢獻的大小，所以分配方式所重視的是每一個成員的淨貢獻，因此，此時的均衡解便可表為：

$$\text{Max } g(X_1) = \prod \Big(M(\{i\}) - X_i\Big)^{\alpha_i}$$

$$\text{s.t. } \sum_{i \in N} X_i = V(N)$$

我們可以利用拉氏乘數法（Lagrange Multipler）求解：

$$£\,(X_i, \lambda) = \prod \Big(M(\{i\}) - X_i\Big)^{\alpha_i} - \lambda\Big(\sum_{i \in N} X_i - V(N)\Big)$$

所以，在滿足一階條件的情況下，可得出下列關係：

$$\frac{M(\{1\}) - X_1}{\alpha_1} = \frac{M(\{2\}) - X_2}{\alpha_2} = \cdots\cdots = \frac{M(\{n\}) - X_n}{\alpha_n}$$

且 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = V(N)$

所以
$$\begin{aligned} M(\{i\}) - X_i &= \frac{\alpha_i}{\sum_{i \in N} \alpha_i} \times \Big[\sum_{i \in N} M(\{i\}) - V(N)\Big] \\ X_i &= M(\{i\}) + \frac{\alpha_i}{\sum_{i \in N} \alpha_i} \times \Big[\sum_{i \in N} M(\{i\}) - V(N)\Big] \end{aligned}$$

因此，在考慮每一個成員對合作團體的淨貢獻時，此時的分配方式以每個成員的$M(\{i\})$為其基本利得，而後根據不同的議價能力，來分配不足利益的部份。所以和分配模式中的第九、十、十一、十二種分配方法相互關聯。

透由上述的討論，我們發現本章中所發展出來的利益分配模式與納許議價理論中的分配方法相互呼應。透由不同議價標的物的認定以及議價能力的選擇，納許議價理論的分配方式可以以本節中所發展之利益分配模式加以具體的表達。

本節中所發展的利益分配模式，不但具體，而且對訊息的要求也相對的簡單。所有的分配方式均立基於合作團體的總利益$V(N)$，個別參與者的機會成本$V(\{i\})$，以及其對團體的邊際貢獻$M(\{i\})$等，幾項簡單且容易取得的資訊，而不用考慮每一種可能形成同盟的情況。也因此，使得本節所發展出的利益分配方式更為切實可行。然而，也正因為使用訊息的簡單，此一利益分配的方式也有若干缺點。例如：自〔表二〕的分析中可知，本節中所發展之利益分配方式，均無法滿足「同盟理性」的要求。因此，在此種利益分配模式之下，合作團體內將有形成小同盟而脫離合作團體的誘因。

肆、合作賽局理論與利益分配模式

在上一節所介紹的共同利益分配方法中，我們利用了合作團體的各項特質，如：人數，每一個成員的邊際貢獻或者所放棄的機會成本…等為基礎，來設定基本利得與分配權數以決定合作利益分配的方法。雖然每一種方法均有各自的優點，且計算較容易。但是，由於在上節中，我們假設合作團體內的成員僅能片面地行動而沒有對所有的可能同盟情況加以考慮。因此在本節中，我們放鬆上述的假設，進一步考慮合作團體內所有可能的同盟行為，以分配合作利益。

在文獻中，由於合作賽局理論對於此種考慮各種同盟可能的利益分配方式有許多討論。因此，在本節中，我們首先討論合作賽局理論中極為著名的兩種利益分配方式，並進一步和我們所發展的利益分配模式比較。

一、夏普利值與核仁解的分配方法

(一)夏普利值（shapley value）

夏普利在1953年利用了三個公理與一個恆等式導出了一個特定的利益分配方式，一般稱為夏普利值。夏普利值可以由下式推算而得：

$$X_i(V)=\sum_{S\subseteq N}\frac{(|S|-1)!\times(|N|-|S|)!}{|N|!}\times\Big[V(S)-V(S-\{i\})\Big]$$

其中$|N|$是全部的合作參與者人數，$|S|$是同盟S中的人數，$V(\bullet)$是特徵函數，$X_iV(V)$是成員i在合作賽局V的所分得的報償。因此夏普利值可解釋為：合作賽局V中的所有成員願意組成一個大同盟，各個成員依序加入合作團體。但加入的順序是隨機的。因此總共有$|N!|$種形成大同盟的可能性；成員i在加入同盟S時，在他之前加入的成員排列可能方式有$(|S|-1)!$種，在他之後加入的則有$(|N|-|S|)!$種，若成員i加入同盟 S，則他的貢獻為$V(S)-V(S-\{i\})$，把所有可能的結盟情形加總起來，就可以計算出成員 i所應分得的報償值，這一個報償值是成員i對各種同盟邊際貢獻的平均值，可以被用來分配合作的利益。

夏普利值雖然具有許多優良的特性，然而卻有二項重要的缺點：(1)夏普利值的分配方式不一定會滿足核心解的要求(Hamlen (1980))（註五）(2)夏普利值的計算方式非常繁雜，當合作團體內的成員過多時，夏普利值便無法作為一個具操作性的分配方式。

(二)核仁解(nucleolus)

這是由Schmeilder (1969)所提出的另一種利益分配方式。其概念和J. Rawls (1971)所提出的福利準則類似，Rawls認為只要能改善社會中最弱勢團體福利的分配就是正當(Just)的，所以分配的方式要求團體中最不幸的人（或團體）之效用能夠極大化。

因此如果在合作團體N中，任何N的子集合S均有一個非負的特徵函數$V(S)$與之對應，向量$X=(X_1,X_2,\ldots\ldots X_n)$則是報酬向量，表示每一個成員所分配到利益的集合，則同盟S，在報償向量X之下，的超額報償 (excess surplus)可定義為$e(S,X)=\sum_{i\in S}X_i-V(S)$。所以超額報償都可以作為同盟$S$對於某一利益分配方式贊成的指標；超額愈小，該種分配方式所受到的支持也就愈薄弱。因此對於報償向量W和Z而言，如果

$$\text{Min}\left\{\sum_{i\in S}W_i-V(S)|S\subset N\right\}>\ \text{Min}\left\{\sum_{i\in S}Z_i-V(S)|S\subset N\right\}$$

那麼我們說報償向量W是比較容易接受。

Kohlberg (1971) 指出合作賽局的核仁解可以利用線性規劃求極大值的方法計算出來：

Max　e

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in S} X_i - e \geq V(S) \qquad S \subseteq N$$
$$\sum_{i \in N} X_i = V(N)$$

雖然相較於夏普利值，核仁解的計算方式較為具體(較易於操作)且可滿足核心解的要求，然而，核仁解卻也不是沒有缺點，例如：Megiddo(1974)便證明核仁解不具備單調性的特質。

二核心分配解與合作利益分配

由上一小節所介紹的夏普利值與核仁解，我們可以知道現代合作賽局理論中最常見的兩種利益分配方式均有其缺點。夏普利值並不一定會落在核心解集合之內，而核仁解不能滿足單調性的特質。所以在本節中，我們將進一步在基本利得以及剩餘利得的架構下，發展一種利益分配的方式，一方面能保持計算上的簡便性而同時能改進上述方法的缺點。

由於我們希望利益分配的結果能夠滿足核心解集合的條件，所以，我們必需先求出在滿足核心解的要求下，合作團體所必須分配到的最小利益，並以此作為各成員參與合作的基本利得。因此，（滿足核心解的）基本利得可以用線性規劃求得：

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in N} U_i$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in S} U_i - V(S) \geq 0 \qquad S \subseteq N; \;\; i \in S$$

令上述線性規劃問題的解為B_c，$B_c = \sum_{i \in N} U_i$，B_c為滿足穩定核心解時所必須支付的最小利益，且解集合向量U，$U = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$，表示在合作團體中核心解集合存在時所必須支付的最小利益時，所以我們可以以此做為設定各成員基本利得的依據：

㈠ 如果共同合作時所創造出來的共同利益，$V(N)$，小於存在有核心解時所必需支付的最小利益，B_c，則此時不論什麼的分配方式，都沒辦法使分配結果位於核心解集合，所以此時必須放棄滿足核心解的條件，而選擇前一節所介紹的分配方式，同時必須對一些同盟的結合加以限制，而使得穩定利益分配方式能夠維持。

㈡ 如果合作時所所創造出來的共同利益，$V(N)$，恰好等於存在有核心解時所必須支付的最小利益，B_c，則此時每一個成員所得到的利益恰好等於U_i，此為每一個成員可以得到的基本利得，而沒有剩餘利得。

㈢ 如果共同合作時所創造出來的共同利益，$V(N)$，大於存在有核心解時所必須支付的最小利益時，B_c，則每一個成員可以先得到U_i的基本利得，而總剩餘利得為$V(N)-B_c$，所以必須對於總剩餘利得另外採取適當的分配方式來分配給每一個成員。而為了使分配的結果能同時滿足虛位競局者原則與單調性，我們建議以$\left[U_i - V(\{i\})\right]$作為剩餘利得分配比例的基礎，也就是每一個成員以$\dfrac{\left[U_i - V(\{i\})\right]}{\left[\sum_{i\in N}\left(U_i - V(\{i\})\right)\right]}$為權數來分配總剩餘利得。因此，每一個參與者所分配到的利益為：

$$X_i = U_i + \frac{U_i - V(\{i\})}{\sum_{i\in N}\left(U_i - V(\{i\})\right)} \times \left[V(N) - B_c\right] \qquad i \in N$$

如果所得到U_i的解集合向量U不為一點時，則此時必須把已經固定的U_i以及所對應的X_i從合作團體的報償中扣除，而重新解此一新的同盟集合之利益分配問題，重覆此項作法，直到有唯一解為止。

我們稱上述的利益分配方法為「核心分配解」，為了更清楚的說明「核心分配解」的具體作法，我們利用兩個例子加以進一步的說明：

例一：如果有四個經濟個體，其合作同盟的特徵函數為：

$V(\{1\}) = 0, V(\{2\}) = V(\{3\}) = 20, V(\{4\}) = 30$

$V(\{1,2\}) = V(\{1,3\}) = 30, V(\{1,4\}) = V(\{2,3\}) = 50, V(\{2,4\}) = V(\{3,4\}) = 75$

$V(\{1,2,3\}) = 80, V(\{1,2,4\}) = V(\{1,3,4\}) = 90, V(\{2,3,4\}) = 95$

$V(\{1,2,3,4\}) = 150$

依「核心分配解」的作法，首先用線性規劃來求解滿足核心解的最小支出為122.5，且其解集合向量為$U = [15, 32.5, 32.5, 42.5]$，而因為$B_c = 122.5 < 150 = V(N)$，所以依據「核心分配解」，每一個成員所分得的利益為：

$$X_1 = 15 + [15/(15 + 12.5 + 12.5 + 12.5)] \times [150 - 122.5] = 22.85$$

$$X_2 = 32.5 + [12.5/(15 + 12.5 + 12.5 + 12.5)] \times [150 - 122.5] = 39.05$$

$$X_3 = 32.5 + [12.5/(15 + 12.5 + 12.5 + 12.5)] \times [150 - 122.5] = 39.05$$

$$X_4 = 42.5 + [12.5/(15 + 12.5 + 12.5 + 12.5)] \times [150 - 122.5] = 49.05$$

例二：假設$V(\{1\}) = 30,\ V(\{2\}) = 50,\ V(\{3\}) = 50$

$V(\{1,2\}) = 80,\ V(\{1,3\}) = 100,\ V(\{2,3\}) = 100$

$V(\{1,2,3\}) = 160$

「核心分配解」首先以線性規劃求滿足核心解的最小支出為150。但U的解集合中，我們只能解得$U_2 = 50,\ U_1 + U_3 = 100,\ U_1$與$U_3$沒有唯一解。而根據所得到的 U_i，我們可以得到$X_2 = 50$，所以我們先把X_2分配給第2個合作參與者，同時，第一個及第三個參與者共可得到$X_1 + X_3 = 110$，

再把$\{1,3\}$當成另一個合作同盟重新分配$V(\{1,3\}) = 110$，則可得到$X_1 = 45,\ X_3 = 65$，所以最後的分配為$X_1 = 45,\ X_2 = 50,\ X_3 = 65$。

在介紹完了「核心分配解」的作法之後，我們進一步探討「核心分配解」所能滿足的性質。

1. 位於核心解集合之內（滿足個人理性，利益增添原則，同盟理性），因為如果$V(N) - B_c > 0$，則$X_i \geq U_i$

且因為$\sum_{i\in S} U_i \geq V(S)$，對所有的$S \subseteq N$，

所以，$\sum_{i\in S} X_i \geq V(S)$，對所有的$S \subseteq N$，

因此滿足核心解的條件。

2. 滿足虛位競局者原則

我們首先考慮如果利益創造的部份分成總基本利得B_c與剩餘利得$V(N)-B_c$兩個部份分配給每個成員；則對於總基本利得B_c的部份，如果合作成員對於合作團體沒有額外貢獻時（註六），則其所分到的利益必定為$V(\{i\})$（註七），而因為此成員所分得的基本利得 $U_i = V(\{i\})$，所以其對於剩餘利得的分配為零，所以此參與者所得到的分配值 $X_i = V(\{i\})$，滿足虛位競局者原則。

3. 滿足單調性

因為每一個成員的分配值為

$$X_i = U_i + \frac{(U_i - V(i))}{\sum_{i\in N}(U_i - V(i))} \times \Big[V(N) - B_c\Big] \qquad i \in N$$

如果$\overline{V}(N) > V(N)$，且$\overline{V}(S) = V(S), S \subseteq N$，則$U_i, \dfrac{(U_i - V(i))}{\sum_{i\in N}(U_i - V(i))}$不會改變，但是，$\Big[\overline{V}(N) - \sum\limits_{i\in N} U_i\Big] > \Big[V(N) - \sum\limits_{i\in N} U_i\Big]$ 則$\overline{X}_i = U_i + \dfrac{U_i - V(i)}{\sum_{i\in N}(U_i - V(i))} \times \Big[\overline{V}(N) - B_c\Big] \geq X_i$ 所以，$\overline{X}_i > X_i$滿足單調性。

根據上面討論的結果，我們可以發現「核心分配解」的分配結果位於核心解集合之內，且同時滿足單調性與虛位競局者原則。我們將本節所介紹之三種方法的特性，加以整理並列於〔表三〕。

以上我們介紹了近代合作賽局理論中有關於夏普利值與核仁解的利益分配的方法。此二種方式均考慮所有可能的同盟情況來分配共同利益。很明顯的，合作賽局理論中所介紹的方法因為利用了較多的資訊，所以能夠滿足較多的性質。但是此兩種分配方法卻都有各自的缺點，因此我們進一步發展出一種新的利益分配方式（核心分配解）

〔表三〕：夏普利值，核仁解與核心分配解的特性

理想特性 / 分配方式	個人理性	利益增添原則	同盟理性	虛位原則	單調性
夏普利值	○	○	×	○	○
核　仁　解	○	○	○	○	×
核心分配解	○	○	○	○	○

，一方面維持計算上的可操作性，同時能改進夏普利值與核仁解兩種分配方式的缺點。

五、結　　論

在本文中，我們探討有關合作利益分配的問題，本文首先探討理想與穩定分配方法所應具備的性質與特性，以做為評定各種分配方法的依據。

第三節中，在成員僅能採取片面行動的假設下我們發展了一個具體可行的線性分配架構。我們把每一個人的所能得到的利益分成基本利得與剩餘利得兩個部份，而根據不同的要求，設定不同的分配方式。雖然在此分配架構下所發展出的分配方法各自有缺點，但是此種分配架構卻十分簡單清楚而容易操作，只要取得少量的資訊就可以進行利益分配，所以也有較高的應用價值。

在第四節中，我們介紹了合作賽局理論中所發展的利益分配機制，如：夏普利值與核仁解。因為上述的方式利用了較多的資訊，並考慮所有的同盟情況以進行利益分配，因此也滿足較多的理想性質。但是夏普利質與核仁解仍然有各自的缺點，所以我們在原有的架構（基本利得與剩餘利得）下進一步發展出一種新的利益分配方式，以改進夏普利值與核仁解的缺點。 本文所發展之利益分配模式，除了可用來分配合作利益之外，還可以應用在其他的分配問題上。例如：共同成本的分攤，職權責任的分派，或者是寡佔市場中，廠商之間市場份額的決定。只要適當的修改特徵函數，本文的分配架構就可以輕易地應用在其他的分配問題上。 由於，本文發展之分配模式的結構非常簡單，對訊息的要求也很少，因此，在實務上具有相當的應用價值。因此，本文特別將此模式中各種分配方式設定的方法，以及其所具有之特性加以介紹，以作為團體間分配合作利益（以及其他分配問題）時的參考。

本文註釋

[註一] 在許多現實的情況下，由於受到制度的限制，參與合作的成員僅能選擇是否要加入某一個團體，而不能和團體內若干的成員另起一個新的合作同盟。例如：對公立大學的教授而言，其僅能選擇要參加或脫離某一特定的教育機構，而不能結合機構內的部份同仁另起一個新的教學單位。

[註二] 如果存在有核心解，則必定存在有$(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$而使得：

$$
\begin{aligned}
X_2 + X_3 + X_4 + \cdots\cdots + X_{n-1} + X_n &\geq V(N - \{1\}) \\
X_1 + X_3 + X_4 + \cdots\cdots + X_{n-1} + X_n &\geq V(N - \{2\}) \\
X_1 + X_2 + X_4 + \cdots\cdots + X_{n-1} + X_n &\geq V(N - \{3\}) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
X_1 + X_2 + \cdots X_{n-2} + \cdots + X_n &\geq V(N - \{n-1\}) \\
X_1 + X_2 + \cdots X_{n-2} + X_{n-1} &\geq V(N - \{n\})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(n-1) \times [X_1 + X_2 + \cdots + X_n] \geq V(N\{1\}) + \cdots + V(N - \{n\}) \\
&V(N) \leq \Big[V(N) - V(N - \{1\})\Big] + \Big[V(N) - V(N\{2\})\Big] + \cdots + \Big[V(N) - V(N - \{n\})\Big] \\
&V(N) - \sum_{i \in N} M(\{i\}) \leq 0
\end{aligned}
$$

[註三] 在1974年間，Gately提出了一個新的分配方法的概念，用來評估印度南部電力發展的成本分配的問題，以了解各種分配方法的穩定性。Gately首先定義合作成員i叛離合作團體時，此合作團體其他成員損失的總合相對於此i成員損失的比例。所以如果這個

比例愈大時，則成員i有較大的力量威脅此合作團體，以使i所得到的利益能夠增加。所以如果我們選擇的利益分配方式是要使每一個成員的最大擾亂傾向（Maximun Propensity to Disrupt）愈小的話，則此解會愈穩定；根據此說法我們可以找出一個解，使每一個成員的擾亂傾向都相等，所以此時必須要求：

$$d_1 = d_2 = \cdots\cdots = d_n$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{V(N)-X_1-V(N-\{1\})}{X_1-V(\{1\})} &= \frac{V(N)-X_2-V(N-\{2\})}{X_2-V(\{2\})} = \cdots \\ &= \frac{V(N)-X_n-V(N-\{n\})}{X_n-V(\{n\})} \end{aligned}$$

$$\frac{M(\{1\})-X_1}{X_1-V(\{1\})} = \frac{M(\{2\})-X_2}{X_2-V(\{2\})} = \cdots\cdots = \frac{M(\{n\})-X_n}{X_n-V(\{n\})}$$

$$\frac{M(\{1\})-V(\{1\})}{X_1-V(\{1\})} = \frac{M(\{2\})-V(\{2\})}{X_2-V(\{2\})} = \cdots\cdots = \frac{M(\{n\})-V(\{n\})}{X_n-V(\{n\})}$$

$$\text{又因為 } \left[X_1-V(\{1\})\right] + \left[X_2-V(\{2\})\right] + \cdots + \left[X_n-V(\{n\})\right] = V(N) - \sum V(\{i\})$$

$$\text{所以 } X_i - V(\{1\}) = \frac{M(\{i\})-V(\{i\})}{\sum\left[M(\{i\})-V(\{i\})\right]} \times \left[V(N) - \sum V(\{i\})\right]$$

$$X_i = V(\{1\}) + \frac{M(\{i\})-V(\{i\})}{\sum\left[M(\{i\})-V(\{i\})\right]} \times \left[V(N) - \sum V(\{i\})\right]$$

此時的分配方法和第八種方法完全相同。因此，我們可以發現第八種分配方法所隱含的意義為：「使每一個成員的擾亂傾向相等。」

[註四] 此一方法為田納西水利局（Tennessee Valley Authority）在分攤多用途水庫費用（於防洪、航行、灌溉及發電）時所採用之方法。此法的意義為：

因為每一個合作參與者所能分配到的利益要大於$V(\{i\})$而小於$M(\{i\})$，所以如果每一個先分配到$M(\{i\})$，則不足利益的部份必須由所有的參與者來負擔，而每一個參與者可以負擔的最大能

力為$M(\{i\})-V(\{i\})$。田納西水利局稱此法為：分離成本分攤法（SCRB： Separable Cost Remaining Benefit Method）。

[註五] Hamlen(1980)指出即使在核心解存在的情況下，夏普利值的解也有可能不滿足核心解的要求，而落於核心解之外。

[註六] 所謂對合作團體沒有額外貢獻是指該成員為一虛位競局者。亦言之，

$$V(N)-V(N-\{i\})=V(\{i\}) \qquad i\in N$$

且$V(S\cup\{i\})=V(S)+V(\{i\})$，對所有的$S\subset N$，則成員$i$對合作團體沒以有額外貢獻。

[註七] 若合作同盟的特徵為$V(N)=B_c=\sum_{i\in N}U_i$時，則此時的分配結果會與核仁解的分配結果相同，而因為核仁解的分配結果滿足虛位競局者原則，所以如果此成員對於合作團體沒有額外貢獻時，這時後此成員所得到的利益為U_i。

參考文獻

1. 王國樑，「高速公路長途客運管制政策之探討」，中華經濟研究院專論，1988。
2. 吳浚郁，「利益分配模式的特性與方法」，國立中山大學企研所未出版之碩士論文，1992。
3. 馬凱、周添城、吳惠林，「年終獎金及分紅之研究」，全國總公會委託研究，1989。
4. 張玉山，「連鎖性企業之最適促銷活動與費用分攤」，中國經濟學會年會論文集，民國79年，頁427–441。
5. 劉維琪、張玉山，「績效獎金的內部分配模式」，管理科學學報第八卷第一期，1990，頁79–91。

6. 劉維琪、張玉山、曾美君，「誠實申報激勵行為與獎金制度」，臺大管理論叢第一卷第一期，1991，頁31–47。

7. 顏平原，「競爭性均衡與議價解」，臺北市銀月刊第十七卷第三期，頁11–20。

8. 林呈獻，共同成本分派之研究，政治大學財政研究所未出版論文，1990。

9. Anandalingam, G., "Asymmetric Players and Bargaining for Profit Shares in Nature Resource Development", Management Science, August 1987, Vol.33, No.8, pp.1048–1057.

10. Balachandran, B.V. and T.S. Ramakrishnan, "Joint Cost Allocation : A Unified Approach", Accounting Review, January 1981, Vol. 56, No.1, pp.85–96.

11. Bell, C. and P. Zusman, "A Bargaining Theoretic Approach to Crop-sharing Contracts", American Economic Review, 1976, Vol.66, No.4, pp. 578–588.

12. Billera, L.J., D.C., Heath, and J. Raanan, "Internal Telephone Billing Rates: A Novel Application of Nonatomic Game Theory", Operation Research, 1978, Vol.26, pp. 956–965.

13. Bird, C.G., K.O. Kortanek, "Game Theoretic Approaches to Some Air Pollution Regulation Problem", Socio-Economic Planning Sciences, 1974, Vol.8, pp.141–147.

14. Borch,K., "Application of Game Theory to Some Problem in Automobile Insurance", The Astin Bulletin, 1962, Vol.2, pp.208–221.

15. Borch, K., The Economics of Uncertainty, Princeton, NJ : Princet on University Press, 1968.

16. Callen, J.L., "Financial Cost Allocations: A Game Theoretic Approach", Accounting Review, 1978, Vol.53, pp.303–308.

17. Chang,Y.S., "Cost Allocation Mechanisms for the Public Enterprisesin a competitive Environment", Chinese Accounting Review, 1992, Vol.26, pp.113–122.

18. Darrough, M.N. and N.M. Stoughton, "A Bargaining Approach to Profit Sharing in Joint Venture", Journal of Business, 1989, Vol.62, No.2, pp.237–270.

19. Driessen, T.S. and S.H. Tijs, "Game Theory and Cost Allocation Problems", Management Science, 1986, Vol.32,pp.1015–1028.

20. Gately, D., "Sharing the Gains from Regional Cooperation: A Electric Power", International Economic Review, Vol.15, 1974, No.1 ,pp.195–208.

21. Glasser, G.J., "Game Theory and Cumulative Voting for cooperate Directors", Management Science, 1958, Vol.5, pp.151–156.

22. Hamlen, S.S., W.A. Hamlen, Jr. and J.T. Tschirhart, "The Use of Core Theory in Evaluating Joint Cost Allocation Schemes", Accounting Review, 1977, Vol.52, pp.616–626.

23. Hamlen, S.S., W.A. Hamlen, Jr. and J.T. Tschirhart, "The Use of the Generalized Shapley Allocation in Joint Cost Allocation", Accounting Review, 1980, V55, pp.269–287.

24. Jensen, D.L., "A Class of Mutually Satisfactory Allocations", Accounting Review, 1977, Vol.52, pp.842–850.

25. Kalai, E., and D. Samet, "Monotonic Solution to General Cooperative Games", Econometrica, March 1985 , Vol.53, No.2, pp.307–327.

26. Kohlberg,E., "On the Nucleolus of Characteristic Function Game", SIAM Journal of Applied Mathematics, 1971, Vol.20, pp.62–66.

27. Littlechild, S.C., "A Game Theoretic Approach to Public Utility Pricing", Western Economic Journal, 1970 , Vol.8. pp.162–166.

28. Littlechild, S.C., "A Simple Expression for the Nucleolus in a Special Case", International Journal of Game Theory, 1974, Vol.3, pp.21–29.

29. Littlechild, S.C., and G. Owen, "A Further Note on the Nucleolus of the Airport Game", International Journal of Game Theory, 1976, Vol.5, pp.91–95.

30. Littlechild, S.C. and G.F. Thompson, "Aircraft Landing Fees: A Game Theory Approach", Bell Journal of Economics, 1977, Vol.8, pp.186–204.

31. Loehman, E. and A. Whinston, "A New Theory of Pricing and Decision Making for Public Investment", Bell Journal of Economics, 1971, Vol.2, pp.606–628.

32. McDonald, I.M. and R.W. Solow, "Wage Bargaining and Employment", Amercian Economic Review, 1981, Vol.71, pp.896–908.

33. Megiddo,N., "On the Nonmonotonicity of the Bargaining Set, the Kernel, and tne Nucleolus of a Game", SIAM Journal of Applied Mathematics, 1974, Vol.27, pp.355–358.

34. Rawls, John A., Theory of Justice, Cambrige, MA: Harvard University Press, 1971.

35. Roth, A.E. and R.E. Verrecchia, "The Shapley Value as Applied to Cost Allocation: A Reinterpretation", Journal of Accounting Research, Spring 1979, Vol. 17, No.1, pp.295–303.

36. Schmeidler, D., "The Nucleolus of a Characteristic Fuction Game", SIAM Journal of Mathematics, 1969, Vol.17, pp.1163–1170.

37. Shapley, L.S., Martin Shubik, "A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System", The American Political Science Review,

1954, Vol.48, pp.787–792.

38. Straffin, P.D. and J.P. Heaney, "Game Theory and the Tennessee Valley Authority", International Journal of Game Theory, 1981, Vol.10, pp 35 43.