

# 運用層級貝氏方法建構以失效測量 爲基礎的可靠度預測模式

## Construction of Reliability Prediction Model by Using the Hierarchical Bayesian Approach

邱志洲 *Chih-Chou Chiu*

國立台北科技大學商業自動化與管理研究所  
Institute of Commerce Automation and Mgt.,  
National Taipei University of Technology

游濬遠 *Chun Yuan Yu*

國立交通大學經營管理研究所  
The Institute of Business and Management,  
National Chiao Tung University

廖子毅 *Chih-Yi Liaw*

國立台北科技大學商業自動化與管理研究所  
Institute of Commerce Automation and Mgt.,  
National Taipei University of Technology

高凌菁 *Ling Jing Kao*

美國 Santa Clara University 行銷學系  
Department of Marketing, Santa Clara University

### 摘 要

隨著現今科技的快速發展，顧客對產品品質的要求亦隨之不斷的提升，生產者必須在有限的時間內，評估並改善產品的可靠度，是以如何選擇一個適當

的可靠度量測方法，對業界而言，是一個相當重要的問題。截至目前為止不管是業界或學界在進行資料分析時，大多採用傳統的統計分析技術，在本研究中，我們嘗試提出一個更一般化的資料分析技術--層級貝氏模式(Hierarchical Bayesian Model)--來量測產品衰退的過程。而在模式建構的過程中，我們利用 Markov Chain Monte Carlo (MCMC)來進行模式參數的估計。此外，論文中亦將針對可靠度模式的失效時間分配型態進行建構並驗證該分配之適合度及其產品壽命預測值的準確性。

**關鍵字：**層級貝氏模式、衰退過程、失效時間、Markov Chain Monte Carlo

## Abstract

The reliability for some devices with few or no failures in their life tests becomes very hard to access if a traditional life test which records only time-to-failure was utilized. To solve this problem, the analysis of the over time degradation processes is always considered in the practical cases. In this paper, a degradation model was constructed by hierarchical Bayesian approach to represent the realization of the degradation processes. Based on the developed model, the failure times and the time-to-failure distribution can be estimated. For finding the appropriate estimates of model's parameters, the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) algorithm is applied. A fatigue crack growth data is used as an example for illustrating the modeling procedure. By specifying the coefficients, we successfully identify the heterogeneity varying across individual products. Moreover, the time-to-failure distribution is further estimated and the reliability bounds were constructed.

**Keywords:** Hierarchical Bayesian Model, Degradation Process, Failure Time, Markov Chain Monte Carlo

## 壹、緒論

隨著產品品質的不斷提昇，消費者對各部份的零組件要求亦日趨嚴格，再加上面對全球化的競爭壓力下，今日的廠商已逐步的針對如何生產出具有高可靠度的產品進行研發。只是在進行產品可靠度的研究當中，如何準確的取得產品可靠度資訊是一個相當重要的議題；尤其是在面對現今具有高可靠的產品

下，許多傳統的可靠度分析方法有其限制。而為了解決這樣的問題，已有許多的學者特別利用產品某項品質特徵值的衰退情況來定義產品的失效與否；事實上，運用這樣的方法許多高可靠度的產品壽命可以被成功的估計出來(邱建賢,2003)。因此，若我們能在產品測試階段時便正確地經由實驗及模式的建立來預測產品的失效時間，我們便可以進一步的去改善產品品質，並能擬定產品銷售後的服務策略，以提高顧客的滿意度。

通常在實務的運用上，當產品之品質、可靠度與時間變化的衰退過程具有關係時，我們便可藉由衰退過程的量測來推估產品的可靠度及相關資訊。此外，當我們針對失效成因的機制予以模式化後，衰退模式的量測資料便可以提供較少數失效或無失效產品更多的可靠度資訊。基本上，在上述的研究領域中，預測物件所呈現的生命週期乃是探討產品可靠度時一個非常重要議題。而通常對於物件生命週期的研究我們會以單一的靜態機率函數來描述，並沒有把其他連續性的物件資料放入考量。但也有另一群學者嘗試以統計模式的建構來描述不同衰退過程中的可靠度資訊，這些相關的議題可以參考 Lu & Meeker (1993), Lu, Meeker & Escobar (1996), Meeker & Escobar (1993), Meeker & Hamada (1995)及 Nelson (1990)等學者之文獻。再者，除了這些靜態或統計方法的應用外，亦有一些學者嘗試以動態的程序來進行衰退模式的建構，例如：Doksum & Hoyland (1992)及 Tang & Chang (1995)等學者的文獻。事實上，綜觀這些文獻研究，我們可以了解，在傳統的靜態統計模式和動態過程建構的程序中，通常都會先假設參數估計的抽樣分配，或是參數檢定的統計量是在資料屬性為隨機或者是資料乃根據某一機率模式所產生的前提下所建構而成的。換言之，傳統的分析方法是在尚未得到樣本觀察值之前，就已經將參數的樣本分配假設為某一種機率分配，而沒有真正針對實際觀察值進行考慮，因此也造成在這樣假設下所進行的所有推論必須架構在大樣本或是樣本趨近於無限大的限制條件下始能成立。此外，當我們面對模式需要同時考慮個別物件與各物件間的品質特性時，所欲估計的參數常將會呈現複雜的相關性問題，進而大幅提高參數估計的困難度。

針對這樣的一個議題，本論文嘗試提出一個更一般化的模式來量測產品衰退過程，而這個方法便是層級貝氏模式(Hierarchical Bayesian Model)。事實上，早在 1763 年貝氏模式便被學者 Rev. Thomas Bayes 所提出。一直到 1950 年代，更有許多統計學家例如 L.J. Savage, Bruno de Finetti, Dennis Lindley, Jack Kiefer 等陸續的利用貝氏方法進行各種相關議題的分析以彌補傳統研究工具上的不足。事實上一直到最近，已有越來越多的著名非統計學家(例如：Harold

Jeffrey 及 Arthur Bowly) 繼續的探討貝氏概念在各領域中的應用。

近年來，除了各領域的專家學者外，許多的統計學家亦已開始利用貝氏模式及 Markov Chain Monte Carlo (MCMC)方法來模擬複雜及非標準化的多變量分配。而由於 MCMC 方法能解決在貝氏分析方法中所存在的複雜且多維度積分問題，因此此種方式亦常被運用在貝氏分析的領域，以便求得模式中各後驗分配的參數估計值。而在產品可靠度預測的相關研究方面，近年來也有許多學者開始利用貝氏方法於衰退問題的推估，例如：Zheng and Ellingwood (1998) 曾利用動態程序來建構一個衰退量測模式，並且加入了與時間相關的噪音項 (time-dependent noise term)，以衡量在固定的振幅負載下裂縫成長中的不確定性，而其中的噪音項是利用人工邊際分配及交互關係兩者來定義。Zhang and Mahadevan (2000) 則利用貝氏程序來量測模式的不確定性，此不確定性包含了運算機制中的不確定性、模式選擇的不確定性以及假設分配中參數的不確定性。此外，也有一些學者結合兩個相對應的裂縫長度模式來考量每個模式中統計分配參數的不確定性，並進一步處理疲勞的可靠度問題。最近，學者 Akama (2002)亦利用了貝氏分析來預測裂縫成長率中的不確定性，並以鋼製座椅的車輪輪軸為研究對象，針對其衰退資料進行實證性分析。在本篇論文中，我們嘗試利用層級貝氏模式來協助我們建構衰退模式，並利用近來廣為人知的模擬方法 MCMC 進行模式中的參數估計。理論上，在 MCMC 的運作程序中，我們不需要直接處理機率密度函數  $p(\theta | y)$  中複雜的積分問題，而是藉由 MCMC 的模擬來求得符合此機率分配的足夠樣本點。此外，機率密度函數平均數及標準差的估計亦可藉由計算模擬出的樣本數值而取得一致的有效參數估計量。

本論文之整體架構可彙整如下：在第二節部分我們先針對本研究所採用的範例資料進行說明；第三節部份則將介紹我們所建構出的層級貝氏模式，並進一步的說明所推導的完全條件分配(full conditional distribution)；第四節部分則將利用上述之範例資料進行論文中所提產品失效模式適當性的實證研究及層級貝氏模式穩健性的驗證；第五節部分本研究將利用反高斯分配函數來建構失效時間的分配型態並驗證該分配之適合度；最後第六節部分將總結本研究的研究結果，並提出對未來的研究建議。

## 貳、實證資料

為了驗證論文中所提出可靠度預測模式的有效性以及層級貝氏方法的可行性，本研究使用 Bogdanoff & Kozin (1984)的裂縫長度資料為範例資料進行實證性分析<sup>1</sup>。此資料集總共包含了 30 個產品(板子)的品質特性--單位裂縫長度(自變數)下紀錄到達該裂縫長度所需之時間(應變數) (亦即當各板子的裂縫長度到達某固定值時所經歷的時間；時間單位為 cycle time)，而每個板子皆包含了 164 筆觀察值。其中，因為裂縫長度最大的容忍值為 49mm，所以當板子裂縫長度到達 49mm 時，本研究便定義此板子為「失效 (failure)」。另外，我們也假設當裂縫長度到達 35mm 時，量測便停止進行。為了觀察運用層級貝氏模式進行可靠度預測的可行性，我們利用所有板子的資訊進行模式之建構。有關 30 個板子的「裂縫長度」對應於「時間」之關係可整理如圖 1 所示。

事實上，在衰退實驗中，每一個板子在裂縫長度到達容忍值時所對應的失效時間會因為板子的特性而有所不同，因此我們所關心的議題是在特定的裂縫長度下，失效時間的預測問題。另外，在資料中的真實失效時間亦可用來協助我們驗證從層級貝氏模式中所估計得到的失效時間值。

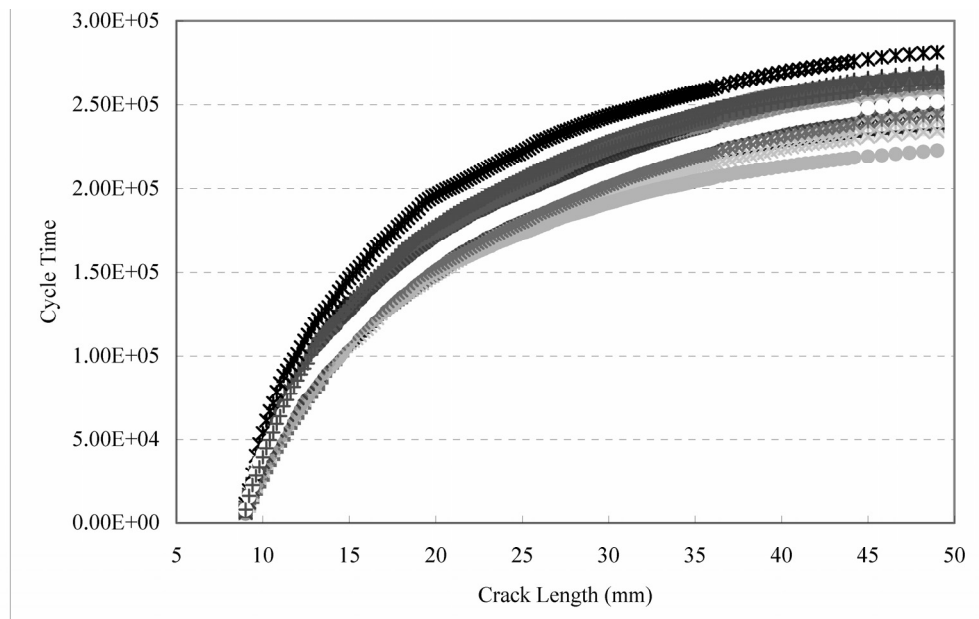


圖 1. 30 個板子裂縫成長圖

資料來源：Bogdanoff & Kozin (1984)

<sup>1</sup> 有關資料的詳細描述可參考 Bogdanoff & Kozin (1984) 論文；作者也特別感謝 Bogdanoff 教授的資料提供使此論文得以完成。

## 參、層級貝氏模式所建構的衰退量測

在這一節中，我們首先將利用多變量常態的層級貝氏模式來進行板子異質性的辨識與建構。在本研究中，我們根據 Liski & Nummi (1996) 所提出的模型予以修正來建構裂縫長度與失效時間的關係式，其關係式可表示如下：

$$t_{ij} = \beta_{i0} + \beta_{i1}y_{ij} + \beta_{i2} \ln(y_{ij}) + \varepsilon_{ij}$$

其中， $y_{ij}$  代表第  $i$  個板子的第  $j$  個裂縫長度，而  $t_{ij}$  代表第  $i$  個板子的第  $j$  次量測時間值，另外， $i=1,2,\dots, N$  且  $j=1,2,\dots,n_i$ 。換句話說，我們是以  $N$  個板子來建構模式，其中第  $i$  個板子在觀察時點  $y_{i1} y_{i2} \dots y_{i,n_i}$  的觀察值分別為  $t_{i1} t_{i2} \dots t_{i,n_i}$ ；亦即  $y_{ij} = y_{ij}, \forall i \neq l, j = 1, 2, \dots, 164$ 。另外，模式中亦假設在已知  $y_{ij}$  的情況下， $t_{ij}$  的條件機率是一常態分配，其分配型態為  $f(t_{ij} | y_{ij}) \sim N(\beta_{i0} + \beta_{i1}y_{ij} + \beta_{i2} \ln(y_{ij}), \sigma_{\varepsilon_{ij}}^2)$ ，此條件分配的意義在於當給定每個  $y_{ij}$  值後， $t_{ij}$  是從平均數為  $\beta_{i0} + \beta_{i1}y_{ij} + \beta_{i2} \ln(y_{ij})$ 、變異數為  $\sigma_{\varepsilon_{ij}}^2$  的常態分配中所抽出的隨機變數值。然而，從相關的文獻中我們卻發現，運用線性模型建構衰退資料可靠度預測模式時，其殘差具有自我相關性(Lu and Meeker, 1995)，因此，我們除了基本的線性模式外，亦將針對誤差項進行第一階自我相關的處理，其修改過的模式可整理如下：

$$t_{ij} = \beta_{i0} + \beta_{i1}y_{ij} + \beta_{i2} \ln(y_{ij}) + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \rho_i \varepsilon_{ij-1} + Z_{ij} \quad (2)$$

其中  $\rho_i$  代表第一階自我相關的係數值， $Z_{ij}$  則為符合  $N(0, \sigma^2)$  的常態隨機誤差值。在 (1) 式中， $t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{Nj}$  在給定  $\beta_{i0}, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \sigma^2, \rho_i$  及  $y_{ij}$  的情況下是各自獨立的，另外，迴歸係數向量  $\beta_i$  則可以用來描述每個板子的異質性，且其符合平均數為  $\bar{\beta}$ ，共變異矩陣為  $V_\beta$  的三維常態分配，其分配型態可表示如  $\beta_i | \bar{\beta}, V_\beta \sim MN_3(\bar{\beta}, V_\beta), i = 1, 2, \dots, N$ 。根據上述的模式設定，本篇論文資料之概似函數可以彙整如下：

$$\begin{aligned}
 l(\beta_i, \sigma^2, \rho_i | \{t_{ij}\}) &\propto \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{n_i} [t_{ij} | Y_{ij}, \beta_i, \sigma^2, \rho_i] \\
 &= \prod_{i=1}^N [t_i | Y_i, \beta_i, \sigma^2, \rho_i]
 \end{aligned} \tag{3}$$

另外，本研究各參數的先驗分配可假設並彙整如方程式(4)到(7)：

$$\bar{\beta} \sim \text{MN}_3(\alpha, V_\alpha) \tag{4}$$

$$V_\beta \sim \text{InverseWishart}(f_0, G_0) \tag{5}$$

$$\sigma^2 \sim \text{InverseGamma}\left(\frac{r_0}{2}, \frac{S_0}{2}\right) \tag{6}$$

$$\rho_i \sim \text{Uniform}(-1,1) \tag{7}$$

藉由樣本資訊以及先驗分配的假設，我們可以利用貝氏理論來推導出各參數的後驗分配，而有關模式後驗分配的推導及估計程序的細項說明可以參考 Carlin and Louis (2000)。有關在層級貝氏模式中，各參數間的關係架構我們可將其彙整如下：

$$[\beta_i | rest] \propto [t_i | Y_i, \beta_i, \sigma^2, \rho_i] \cdot [\beta_i | \bar{\beta}, V_\beta] \tag{8}$$

$$[\bar{\beta} | rest] \propto \prod_{i=1}^N [\beta_i | \bar{\beta}, V_\beta] \cdot [\bar{\beta}] \tag{9}$$

$$[V_\beta | rest] \propto \prod_{i=1}^N [\beta_i | \bar{\beta}, V_\beta] \cdot [V_\beta] \tag{10}$$

$$[\sigma^2 | rest] \propto \prod_{i=1}^N [t_i | Y_i, \beta_i, \sigma^2, \rho_i] \cdot [\sigma^2] \tag{11}$$

$$[\rho_i | rest] \propto [t_i | Y_i, \beta_i, \sigma^2, \rho_i] \cdot [\rho_i] \tag{12}$$

在模式中  $\beta_i$  參數可以用來代表每個板子的異質性，如果我們以  $\beta$  來代替  $\beta_i$  參數，則表示我們假設所有板子具有同質性。換言之，若假設  $\beta$  為  $\beta_i$ ，將無法估計出個別板子所呈現的差異。通常在層級貝氏方法的實務運用上，需先處理許多複雜的積分問題才能得到參數的估計值，學者們常常利用 MCMC(Markov chain Monte-Carlo) 技術來進行層級貝氏模式中模式參數的估計。而在使用 MCMC 方法時，使用者亦常根據處理問題的不同而採用不同的方法，這些方法包括 Metropolis-Hastings Algorithm、Random-walk Metropolis (Metropolis et al., 1953)及 Gibbs Sampler (Geman and Geman, 1984)。事實上，在這些抽樣的

方法中，由於 Gibbs Sampler 可以在缺乏真實母體分配確切型式的情況下，產生出分配中一連串參數的估計值，而這些估計值又可被視為從真實母體分配中所抽樣出的樣本，因此，本研究將採用 Gibbs Sampler 的方式來進行模式之參數估計，而關於 Gibbs sampler 的相關文獻則可以參考 Gelfand & Smith (1990)、Geman & Geman (1984)。基本上，在使用 Gibbs Sampler 進行參數估計的過程中，Gibbs Sampler 會藉由推算出的完全條件分配，在一次估計一個參數的抽樣作業下利用當期馬可夫鏈中所估計出的參數估計值，來協助下一期的模式參數估計，而這樣的程序會一直迭代進行，直到所有參數估計達到最後的穩態狀況，便可取得最佳的估計結果。在本論文中，我們根據方程式 8-12 所推導出的完全條件分配及 Gibbs Sampler 方法進行參數的估計。有關各參數詳細的完全條件機率分配推導可參考附錄 A 之內容。

## 肆、衰退預測

正如我們在第二節中所提到的，本論文將利用 30 個板子中，所有 9mm 到 35mm 的資料來進行可靠度模式的建構，並預測每個板子在裂縫長度到達 49mm 時的失效時間。而在利用層級貝氏模式進行模式建構前，我們必須要先針對各參數先驗分配內的參數進行初始值的設定。在本論文中各參數初始值的設定可整理如表 1。

表 1. 各參數先驗分配參數值設定表

參數	$\bar{\beta}$			$V_{\beta}$			$\sigma^2$	
	$\alpha$			$V_{\alpha}$	$f_0$	$G_0$	$r_0$	$S_0$
初始值設定	$\begin{bmatrix} -5.7 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -5.2 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8 \times 10^5 \end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 \end{bmatrix}$	5	$\begin{bmatrix} 1.6 \times 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 3.8 \times 10^7 \end{bmatrix}$	2	2



根據相關的參數初始值設定，我們接著利用 R 軟體撰寫 MCMC 的抽樣方式進行參數的模擬與估計，在設定模擬次數為 10000 次的情況下，我們發現參數在模擬至 5000 次左右時，其估計值已達收斂之狀態，因此我們取後 5000 次參數模擬的平均結果作為模式參數的估計值，有關  $\bar{\beta}_{i_0}$ ,  $\bar{\beta}_{i_1}$ , 及  $\bar{\beta}_{i_2}$  的後 5000 次估計值的參數收斂圖則可整理如圖 2-4 所示。另外，為了要驗證 MCMC 所得參數估計值的合理性，我們將  $\beta_{i_0}$ 、 $\beta_{i_1}$ 、 $\beta_{i_2}$ 、 $\rho_i$ 、 $\bar{\beta}$ 、 $V_{\beta}$  及  $\sigma^2$  等各參數的估計值及其信賴區間結果彙整如表 2-4。

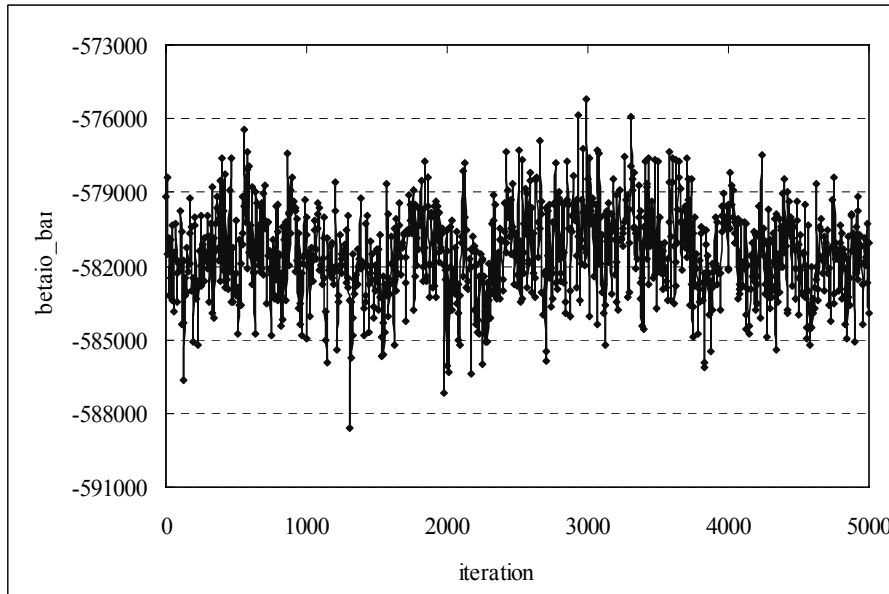


圖 2.  $\bar{\beta}_{i_0}$  後 5000 次參數收斂圖

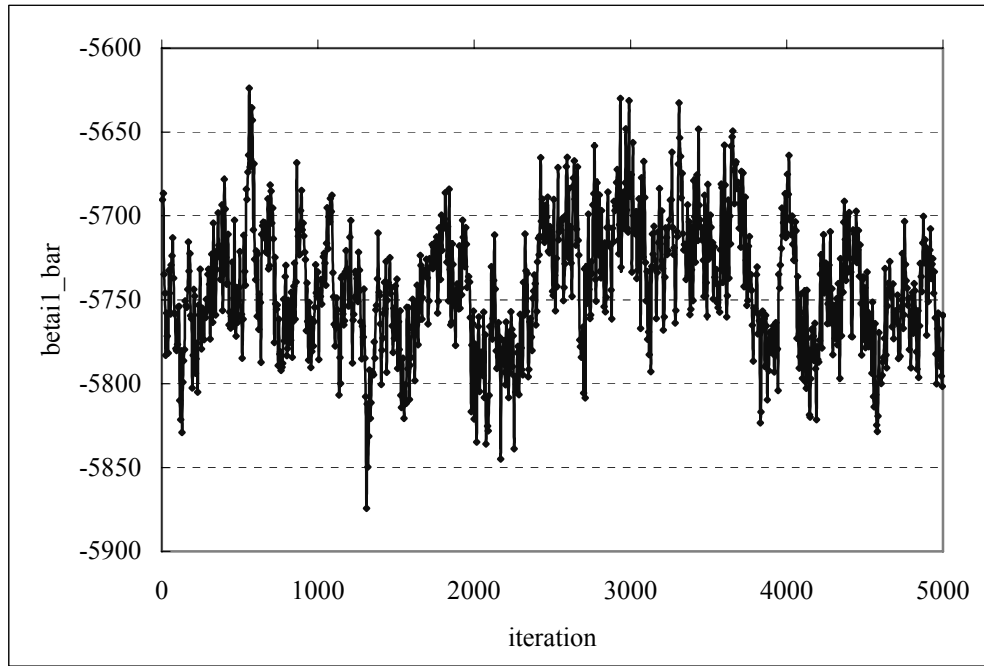


圖 3.  $\bar{\beta}_{i1}$  後 5000 次參數收斂圖

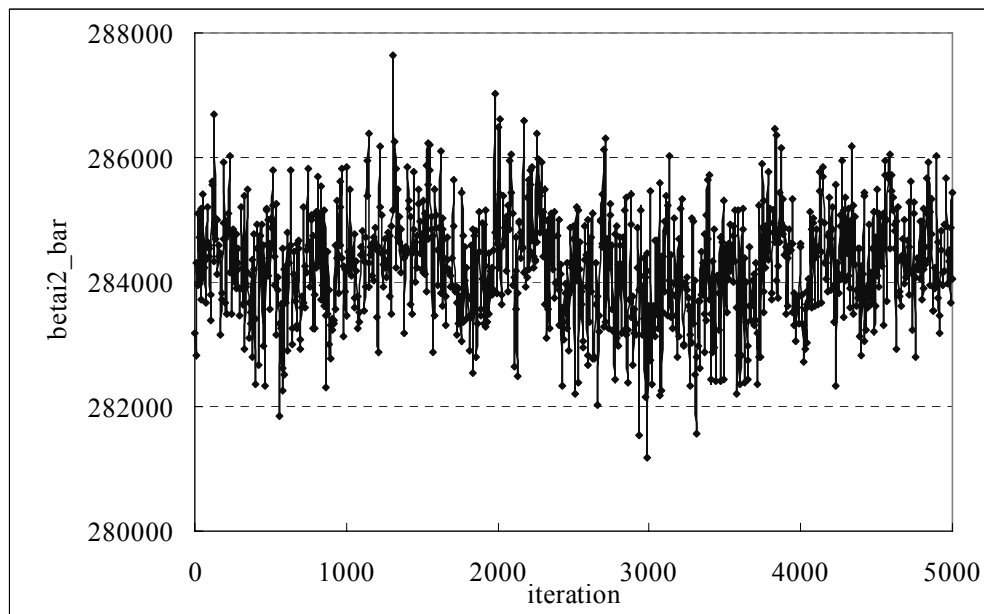


圖 4.  $\bar{\beta}_{i2}$  後 5000 次參數收斂圖

表 2.  $\beta_{i0}$  及  $\beta_{i1}$  之參數估計值 95%信賴區間

	$\beta_{i0}$			$\beta_{i1}$		
	下界	估計值	上界	下界	估計值	上界
板子 1	-562818	-547699	-530865	-5403.24	-5217.76	-5010.67
板子 2	-577626	-562754	-546346	-5566.47	-5389.00	-5189.40
板子 3	-566671	-551284	-534304	-5447.32	-5260.85	-5051.75
板子 4	-599946	-585409	-568029	-5824.30	-5648.59	-5436.81
板子 5	-614692	-600517	-583416	-5995.79	-5820.84	-5613.58
板子 6	-576899	-562088	-545600	-5565.38	-5382.51	-5183.43
板子 7	-597194	-582205	-565297	-5795.96	-5612.73	-5407.82
板子 8	-567657	-552418	-535477	-5457.07	-5272.47	-5060.36
板子 9	-573908	-559612	-543184	-5525.73	-5354.53	-5152.36
板子 10	-582902	-568982	-552536	-5630.73	-5460.00	-5260.81
板子 11	-606185	-592073	-574760	-5894.40	-5723.13	-5513.63
板子 12	-578506	-564209	-547602	-5577.10	-5406.87	-5200.71
板子 13	-561170	-545200	-527551	-5383.08	-5190.76	-4979.38
板子 14	-575621	-561038	-544343	-5550.00	-5369.68	-5165.57
板子 15	-554465	-537323	-518776	-5309.13	-5103.47	-4878.64
板子 16	-595225	-580937	-563488	-5770.73	-5596.54	-5386.41
板子 17	-590457	-576326	-559631	-5716.77	-5543.89	-5342.26
板子 18	-593216	-578961	-561953	-5746.69	-5573.25	-5367.63
板子 19	-572805	-559020	-542961	-5514.39	-5346.17	-5148.75
板子 20	-605622	-591265	-573755	-5889.80	-5714.77	-5505.88
板子 21	-597362	-582714	-565356	-5793.40	-5616.06	-5406.48
板子 22	-602802	-588283	-570805	-5857.16	-5680.53	-5474.75
板子 23	-575864	-560835	-544246	-5546.74	-5367.98	-5166.60
板子 24	-609873	-594767	-576677	-5938.44	-5752.51	-5536.12
板子 25	-612544	-597698	-580336	-5968.95	-5787.72	-5572.38
板子 26	-611974	-597416	-579542	-5959.32	-5784.70	-5578.13
板子 27	-591791	-577480	-560604	-5730.29	-5558.09	-5355.16
板子 28	-658982	-643849	-626072	-6499.87	-6317.36	-6101.38
板子 29	-591174	-576626	-559450	-5725.03	-5547.99	-5342.51
板子 30	-619127	-604374	-586400	-6043.50	-5865.05	-5645.42

表 3.  $\beta_{i2}$  及  $\rho_i$  之參數估計值 95%信賴區間

	$\beta_{i2}$			$\rho_i$		
	下界	估計值	上界	下界	估計值	上界
板子 1	260952.4	267901.7	276707.3	0.979360	0.991280	0.998876
板子 2	268372.3	275176.8	283766.0	0.982964	0.992820	0.999222
板子 3	262685.5	269632.2	278967.0	0.980780	0.990698	0.998602
板子 4	278922.5	286122.3	294788.0	0.987351	0.994728	0.999418
板子 5	286321.7	293423.0	301751.2	0.990465	0.996018	0.999563
板子 6	268192.7	274854.3	283617.7	0.982754	0.992360	0.999071
板子 7	277548.7	284573.6	293137.8	0.986937	0.994465	0.999339
板子 8	263107.8	270181.6	279119.9	0.979840	0.990957	0.998824
板子 9	267003.5	273657.1	282123.7	0.979474	0.990647	0.998729
板子 10	271712.2	278186.5	286103.2	0.979696	0.991403	0.998968
板子 11	282160.1	289343.7	297389.2	0.987798	0.995100	0.999542
板子 12	269217.3	275878.6	284239.5	0.980940	0.991417	0.998769
板子 13	259473.3	266693.0	276062.9	0.981320	0.991389	0.998608
板子 14	267573.3	274347.1	282874.9	0.981992	0.992522	0.999150
板子 15	255157.1	262884.1	273048.1	0.981345	0.989901	0.997482
板子 16	277041.4	283962.4	292219.7	0.985081	0.993945	0.999333
板子 17	274947.4	281734.4	289996.9	0.984795	0.993620	0.999210
板子 18	276135.0	283008.8	291129.3	0.984317	0.993589	0.999311
板子 19	266830.1	273373.0	281544.3	0.978067	0.990967	0.999026
板子 20	281840.6	288952.5	297318.7	0.988366	0.995306	0.999485
板子 21	277816.5	284822.2	293459.0	0.986198	0.994134	0.999295
板子 22	280545.7	287511.8	295731.1	0.988187	0.995081	0.999429
板子 23	267406.5	274249.0	282906.3	0.985424	0.993491	0.999180
板子 24	283324.6	290647.0	299180.7	0.985941	0.994096	0.999300
板子 25	284880.6	292061.4	300627.7	0.989110	0.995466	0.999466
板子 26	284893.1	291925.6	300201.4	0.988725	0.995286	0.999477
板子 27	275537.5	282291.4	290715.6	0.985374	0.993676	0.999182
板子 28	307137.0	314358.4	323101.2	0.993998	0.997411	0.999699
板子 29	275075.4	281878.8	290700.6	0.985494	0.993835	0.999301
板子 30	288006.4	295286.1	303568.3	0.990477	0.996107	0.999559

表 4. 參數估計值及標準差

估計參數	估計值	標準差
$\bar{\beta}$	$\begin{bmatrix} -575663.1 \\ -5534.1 \\ 281416.6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 30.46 \\ 19.22 \\ 28.57 \end{bmatrix}$
$\bar{\beta}_{i0}^*$	-576112.0	8881.90
$\bar{\beta}_{i1}^*$	-5542.1	107.54
$\bar{\beta}_{i2}^*$	281630.6	4289.63
$V_{\beta}$	$\begin{bmatrix} 22555371438 & 254742127 & -10901061230 \\ 254742127 & 2956435 & -123042169 \\ -10901061230 & -123042169 & 5268626567 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5910965475 & 66931584 & 2856961868 \\ 66931584 & 768565 & 32340330 \\ 2856961868 & 32340330 & 1380878247 \end{bmatrix}$
$\sigma^2$	310741.8	7227.87
$\bar{\rho}_i$	0.9939	0.003815
* 分別代表 30 個板子的 $\beta_{i0}$ 、 $\beta_{i1}$ 以及 $\beta_{i2}$ 之參數平均數		

由表 4 中我們可以發現， $\bar{\beta}_{i2}$  的參數估計值為 281416.6，此代表變數  $\ln(y_{ij})$  項的斜率值為正，當可解釋為在實際資料中裂縫長度與量測時間關係為曲線形狀的主要原因。除此之外， $\beta$  的變異數矩陣  $V_{\beta}$  的後驗參數估計值分別為 2.2E10，2.9E6 以及 5.2E9。由於模式中所估計出  $\bar{\beta}$  的向量值與  $\beta_{i0}$ 、 $\beta_{i1}$  及  $\beta_{i2}$  的參數估計平均值非常接近，基於上述兩點我們了解在本研究中所建構出的層級貝氏模式可以適當的反應出不同板子的特性。另外， $\bar{\rho}_i$  的數值非常的大 (0.9939) 亦可驗證誤差項間確實存在顯著的自我相關。為驗證此事實，我們進一步直接將  $\rho_i$  令為 0.9999 並觀察模式的估計結果(如表 5)。(此處不將  $\rho_i$  直接令為 1 的原因在於本論文中在估計參數  $\beta_i$  的程序上曾先對  $t_{ij}$  與  $Y_{ij}$  先進行差分轉換，詳細作業可參考附錄 A 中參數  $\beta_i$  後驗分配的推導)。根據表中之數據我們發現，在將  $\rho_i$  以 0.9999 代入不再將其視為未知的情況下，模式中其餘參

運用層級貝氏方法建構以失效測量為基礎的可靠度預測模式

數的估計結果與表 4 的數據比例上相差不大。換言之，將  $\rho_i$  令為 0.9999 對於模式的估計及預測結果並沒有顯著的改變。

在建構模式的預測能力評估方面，我們先整理了根據層級貝氏模式所得到的前三個板子預測值與實際板子的衰退數據(如圖 5 所示)。從圖中我們發現，層級貝氏模式所估計出來的預測曲線非常貼近真實值，因此顯示本研究所建構的層級貝氏模式所提供的失效時間預測有相當程度的準確性。

表 5. 當  $\rho_i$  令為 0.9999 時參數估計值及標準差

估計參數	估計值	標準差
$\bar{\beta}$	$\begin{bmatrix} -575664.9 \\ -5541.7 \\ 281414.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 30.53 \\ 25.46 \\ 28.05 \end{bmatrix}$
$\bar{\beta}_{i_0}^*$	-576689.5	9404.33
$\bar{\beta}_{i_1}^*$	-5455.563	116.16
$\bar{\beta}_{i_2}^*$	281906.6	4639.34
$V_{\beta}$	$\begin{bmatrix} 22559267635 & 2544969884 & -10902689129 \\ 2544969884 & 2960330 & -123149759 \\ -10902689129 & -123149759 & 5269290228 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5854266046 & 66931584 & 2856961868 \\ 66485580 & 765141 & 32340330 \\ 2829531885 & 32124979 & 1367607913 \end{bmatrix}$
$\sigma^2$	313615.8	7086.058
$\bar{\rho}_i$	令為 0.9999	0
* 分別代表 30 個板子的 $\beta_{i_0}$ 、 $\beta_{i_1}$ 以及 $\beta_{i_2}$ 之參數平均數		

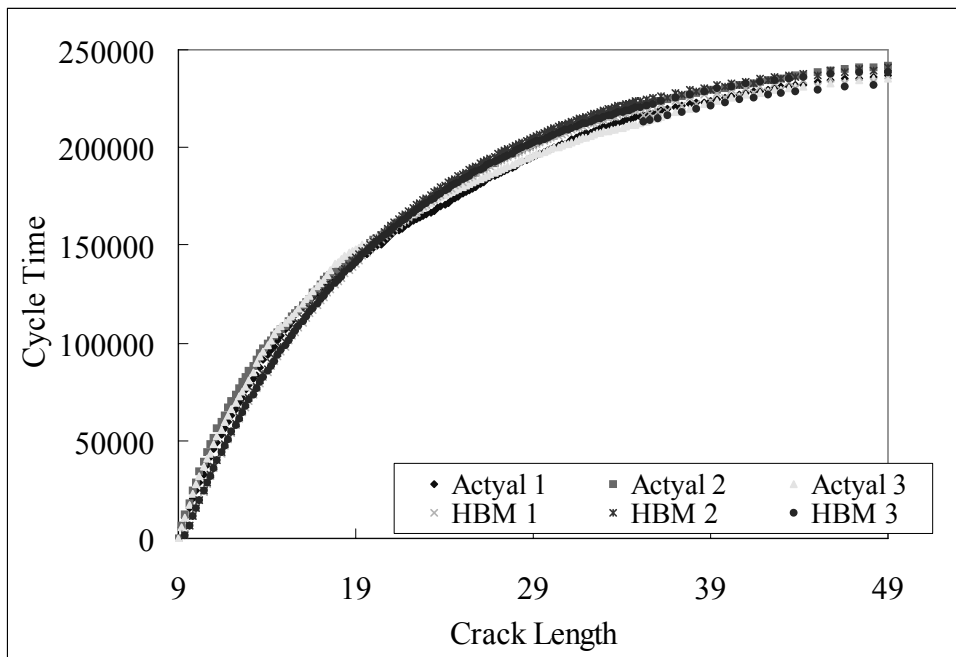


圖 5. 第 1~3 個板子量測時間實際值與層級貝氏模式預測值之比較

為了要進一步驗證層級貝氏模式的預測能力，我們根據 $\beta_i$ 的 MCMC 抽樣樣本，以其 95%的參數信賴區間來建構板子的預測區間<sup>2</sup>，並將其與實際板子的失效時間進行比較，來觀察模式預測的準確性。圖 6 及圖 7 分別為裂縫長度在 49mm 時，層級貝氏模式對於失效時間 95%及 90%的預測區間與實際失效時間值的比較圖。從圖中可發現，當信賴度為 90%及 95%時，雖有部分板子的實際值落於預測區間外，但整體而言層級貝氏模式可以準確的抓住資料的趨勢。由此可以證明層級貝氏模式的確具有不錯的預測能力。為進一步驗證所提模式的有效性，我們亦針對當裂縫到達 30mm 便停止量測的資料集進行分析。相關的分析結果可彙整如表 6。由表中數據我們發現，當以裂縫到達 30mm 便停止量測的資料集來進行分析時，由於建立模式的資料量較小，因此各估計參數的信賴區間相對增大且最後的失效預測誤差也明顯增加。但在以“ABS(誤差)/真實值”為依據來進行比較，我們發現「裂縫到達 30mm 資料集的“ABS(誤

<sup>2</sup>  $[t_{pred} | t] = \int [t_{pred} | \beta, V_\beta, \rho, \sigma^2][\beta, V_\beta, \rho, \sigma^2 | t] d\beta dV_\beta d\rho d\sigma^2$

運用層級貝氏方法建構以失效測量為基礎的可靠度預測模式

差)/真實值”」平均較「裂縫到達 35mm 資料集的“ABS(誤差)/真實值”(於表 7)」增加 0.001，這表示在樣本數減少的情形下使用層級貝氏模式進行失效時間的預測仍具有相當的可行性。

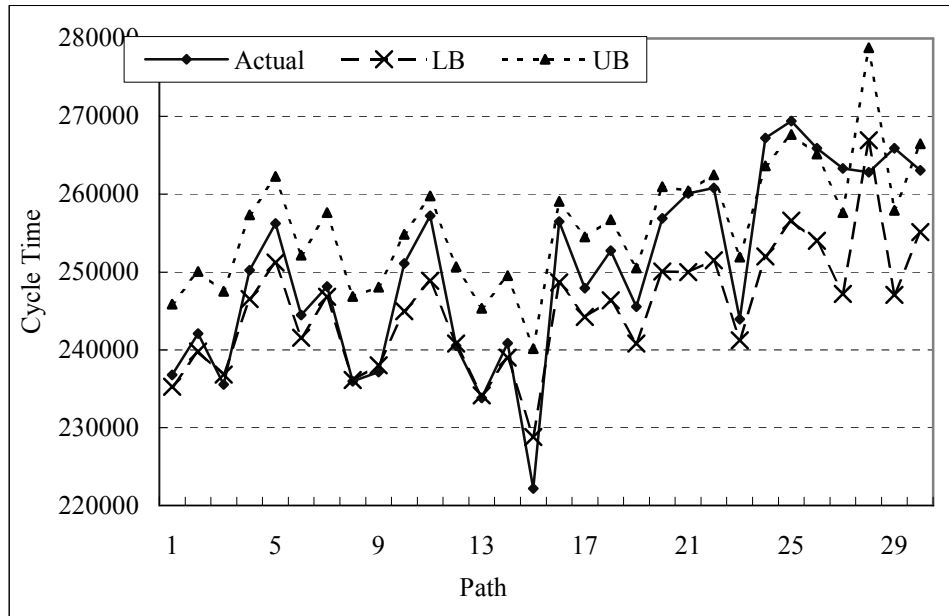


圖 6. 49mm 時失效時間的 95%預測區間

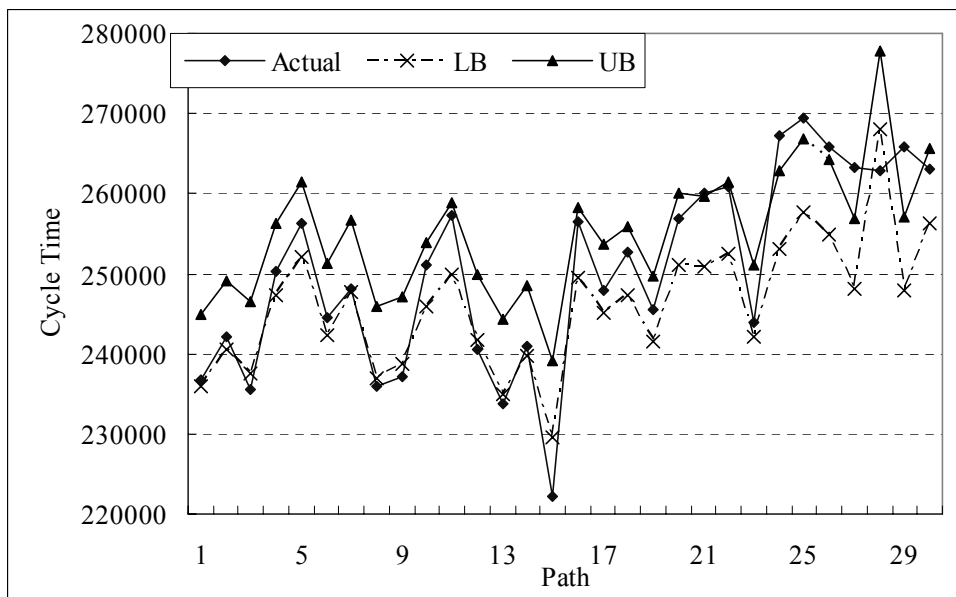


圖 7. 49mm 時失效時間的 90%預測區間



表 6. 「裂縫到達 30mm 資料集」 30 個板子  
在 49 mm 時的真實失效時間與其估計值之比較

板子	真實值	預測值	誤差	ABS(誤差)/真實值
1	236784	240796.8	-4012.82	0.016947
2	242068	245759.2	-3691.16	0.015248
3	235548	243192.7	-7644.65	0.032455
4	250234	252722.8	-2488.83	0.009946
5	256238	257104.7	-866.662	0.003382
6	244456	247822.2	-3366.23	0.013770
7	248144	253401.6	-5257.57	0.021188
8	235937	241882.6	-5945.59	0.025200
9	237155	244429.2	-7274.16	0.030673
10	251073	251056.6	16.37244	6.52E-05
11	257218	254824.1	2393.94	0.009307
12	240509	247106.1	-6597.06	0.027430
13	233820	239715.4	-5895.38	0.025213
14	240849	245207.6	-4358.61	0.018097
15	222197	235011.4	-12814.4	0.057671
16	256494	254998.8	1495.199	0.005829
17	247939	250435.5	-2496.46	0.010069
18	252740	252582.3	157.6725	0.000624
19	245528	245973.2	-445.166	0.001813
20	256898	256155.3	742.6557	0.002891
21	260100	255629.8	4470.226	0.017187
22	260799	257402.8	3396.192	0.013022
23	243935	247131.1	-3196.12	0.013102
24	267230	258053.3	9176.661	0.034340
25	269392	262432.1	6959.921	0.025836
26	265914	260266.3	5647.712	0.021239
27	263303	253789.8	9513.232	0.036130
28	262791	272088.8	-9297.84	0.035381
29	265912	253580.7	12331.26	0.046373
30	263040	261201.1	1838.886	0.006991
平均數	250474.8	251391.8	-916.957	0.019247

## 伍、失效時間分配函數的估計及可靠度預測

### 一、實際失效時間與層級貝氏模式預測結果之比較

為了要比較實際失效時間與層級貝氏模式所預測失效時間之預測誤差，我們將兩者數據整理如表 7。從表 7 中可以發現，在 30 個板子中最大的預測誤差為 13039(約為其真實失效時間的 4.9%)，且 30 個板子的平均預測誤差約為平均真實失效時間的 1.8%。事實上，針對所有板子同時進行模式建構及誤差的估計對於傳統的迴歸分析方法或是時間數列方法來說，是相當困難的。另外，為了要進一步的比較實際失效時間與層級貝氏模式所預測之失效時間兩者間是否有顯著的差異，我們利用成對不獨立的 Wilcoxon Signed-Rank 檢定來進行檢定，其結果可整理成表 8。由於在 Wilcoxon Signed-Rank 檢定中，虛無假設  $H_0$  是假設欲檢定的兩個資料集具有相同的分配，而我們從表 8 中之數據可以知道，Wilcoxon Signed-Rank 檢定所計算出的統計量為-0.586 且其 p-Value 值為 0.558，因此依據檢定結果我們無法拒絕  $H_0$  之假設，亦即兩個資料集是屬於同一分配的事實。

表 7. 「裂縫到達 35mm 資料集」30 個板子在 49 mm 時的真實失效時間與其估計值之比較

板子	真實值	預測值	誤差	ABS(誤差)/真實值
1	236784	240359.0	-3574.99	0.015098
2	242068	244863.8	-2795.83	0.011550
3	235548	241910.2	-6362.24	0.027010
4	250234	252136.1	-1902.10	0.007601
5	256238	257036.2	-798.182	0.003115
6	244456	246823.5	-2367.46	0.009685
7	248144	252343.1	-4199.11	0.016922
8	235937	241288.2	-5351.20	0.022681
9	237155	242995.6	-5840.62	0.024628
10	251073	250037.6	1035.38	0.004124
11	257218	254585.2	2632.82	0.010236
12	240509	245810.3	-5301.28	0.022042
13	233820	239537.1	-5717.14	0.024451
14	240849	244075.9	-3226.93	0.013398

板子	真實值	預測值	誤差	ABS(誤差)/真實值
15	222197	233988.1	-11791.10	0.053066
16	256494	254256.4	2237.63	0.008724
17	247939	249546.6	-1607.55	0.006484
18	252740	251878.5	861.45	0.003408
19	245528	245538.3	-10.33	0.00004.2
20	256898	255906.7	991.35	0.003859
21	260100	255429.7	4670.29	0.017956
22	260799	257288.9	3510.14	0.013459
23	243935	246750.8	-2815.80	0.011543
24	267230	258325.9	8904.09	0.033320
25	269392	262311.5	7080.52	0.026283
26	265914	259806.0	6107.97	0.022970
27	263303	252781.9	10521.12	0.039958
28	262791	273111.2	-10320.20	0.039272
29	265912	252873.2	13038.84	0.049034
30	263040	261202.8	1837.235	0.006985
平均數	250474.8	250826.6	-351.78	0.018297

表 8. Wilcoxon Signed Ranks Test 檢定

樣本資料 1	30 個板子的失效時間真實值
樣本資料 2	30 個板子的失效時間預測值
Z	-0.586
P-value	0.558

## 二、失效時間分配之估計

通常在選擇描述失效資料的分配函數時，除了要考慮取得資料的實驗進行方式外，還必須要能精確地反應出資料本身的失效特性。在考量上述因素並參考 Meeker and Escobar (1998)等相關文獻後，我們選擇反高斯分配(Inverse Gaussian distribution)作為本研究經由動態程序模擬後所得失效時間分配的函數。而反高斯分配的累積分配函數型態  $IG(t | \theta, \lambda)$  可以表示如下：

運用層級貝氏方法建構以失效測量為基礎的可靠度預測模式

$$F(t; \theta, \lambda) = \Phi \left[ \frac{(t - \theta)\sqrt{\lambda}}{\theta\sqrt{t}} \right] + \exp\left(\frac{2\lambda}{\theta}\right) \Phi \left[ -\frac{(t + \theta)\sqrt{\lambda}}{\theta\sqrt{t}} \right] \quad t \geq 0, \theta > 0, \lambda > 0 \quad (13)$$

其中  $\Phi(\cdot)$  是標準常態分配的累積分配函數，而反高斯函數的機率密度函數可以表示如下：

$$f(t; \theta, \beta) = \sqrt{\frac{\beta\theta}{2\pi t^3}} \exp\left[-\frac{\beta(t - \theta)^2}{2\theta t}\right] \quad \beta = \lambda / \theta, \text{ for all } t > 0 \quad (14)$$

其中  $\theta$  和  $\beta$  分別是反高斯函數的位置及形狀參數。而有關反高斯失效分配函數中， $\theta$  與  $\beta$  參數的估計，我們仍採用貝氏的技術分別針對「真實的失效時間值」與「估計的失效時間值」來進行。在先驗機率的採用方面，我們先假設  $\theta$  及  $\beta$  分別符合下列分配：

$$\theta \sim N(u_0, V_0) \quad (15)$$

$$\beta \sim \text{Inverse Gamma}\left(\frac{r_0}{2}, \frac{S_0}{2}\right) \quad (16)$$

另外，對於失效時間資料的概似函數則可以表示如下：

$$l(\theta, \beta | \{t_i\}) \propto \prod_{i=1}^N f(t_i | \theta, \beta) = \left(\frac{\beta\theta}{2\pi}\right)^{2n} \prod_{i=1}^N t_i^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\beta}{2\theta} \sum_{i=1}^N \frac{(t_i - \theta)^2}{t_i}\right) \quad (17)$$

之後，同樣藉由樣本資訊及各參數先驗分配的假設，我們可以利用貝氏理論推導出參數  $\theta$  和  $\beta$  之後驗分配，有關各參數完全條件分配的形式可以整理如下(有關  $\theta$  和  $\beta$  參數詳細的完全條件分配推導可參考附錄B)：

$$[\theta | \text{rest}] \propto [t_i | \theta, \beta] \cdot [\theta] \quad (18)$$

$$[\beta | \text{rest}] \propto [t_i | \theta, \beta] \cdot [\beta] \quad (19)$$

至於在  $\theta$  和  $\beta$  參數的估計上，由於其完全條件分配的形式並無 closed form，所以此處我們將採用 Metropolis-Hastings 方法來進行估計。換言之，我們將運用 Metropolis-Hastings 方法及(18)、(19)兩式遞迴地進行參數的隨機抽取：將  $\theta$  參數函數所得之參數估計值帶入  $\beta$  參數函數中以求得  $\beta$  參數之估計值，

並以此程序遞迴的進行直到兩參數之參數估計值呈現收斂型態為止。在同樣設定模擬次數為 10000 次的情況下，我們截取後 5000 次的參數模擬平均值作為參數之估計值。有關針對「真實的失效時間值」與「估計的失效時間值」所求得的參數估計值及信賴區間可以整理如下：

表 9.30 個板子的真實失效時間及估計失效時間下 $\theta$ 與 $\beta$ 參數估計值 95%信賴區間

	30 個板子的失效時間真實值			30 個板子的失效時間預測值		
	下界	HBM 估計值	上界	下界	HBM 估計值	上界
$\theta$	2.4828E05	2.5103E05	2.5739E05	2.4831E05	2.5311E05	2.5814E05
$\beta$	2.4117E02	4.1153E02	6.1336E02	2.3956E02	4.1269E02	6.2158E02

為了驗證反高斯分配對於本研究失效資料是否具有高度之模式適合度 (Fitness)，我們分別繪製失效時間真實值及估計值之 P-P 圖以驗證分配之適合度。有關 P-P 圖的繪製，我們先假設失效時間的真實值與預測值分別符合  $IG_i(t | \theta, \lambda) = F_{0i}(t)$  之分配，(其中  $i$  代表真實值或預測值兩者)，並假定資料集  $i$  所對應的失效時間分配  $F_i(t)$  可以利用中間間隔 (median rank) 函數進行估計  $\hat{F}_{i,MR}(t)$ 。事實上，如果我們假定的模式適合，我們所繪製之函數圖形  $\{(\hat{F}_{i,MR}(t), F_{0i}(t)); t > 0\}$  將會落於 P-P 圖的 45 度線上。在本研究中，我們使用層級貝氏方法所求得之參數估計值  $(\theta, \lambda)$  代入  $F_{0i}(t)$  以求得  $\hat{F}_{0i}(t)$ ，並以  $\hat{F}_{0i}(t)$  來估計  $F_{0i}(t)$ 。最後我們再針對失效時間的真實值與預測值分別進行 P-P 圖之繪製(如圖 8(a)及 8(b))。從圖中我們可以發現，兩者圖形大致成 45 度線。

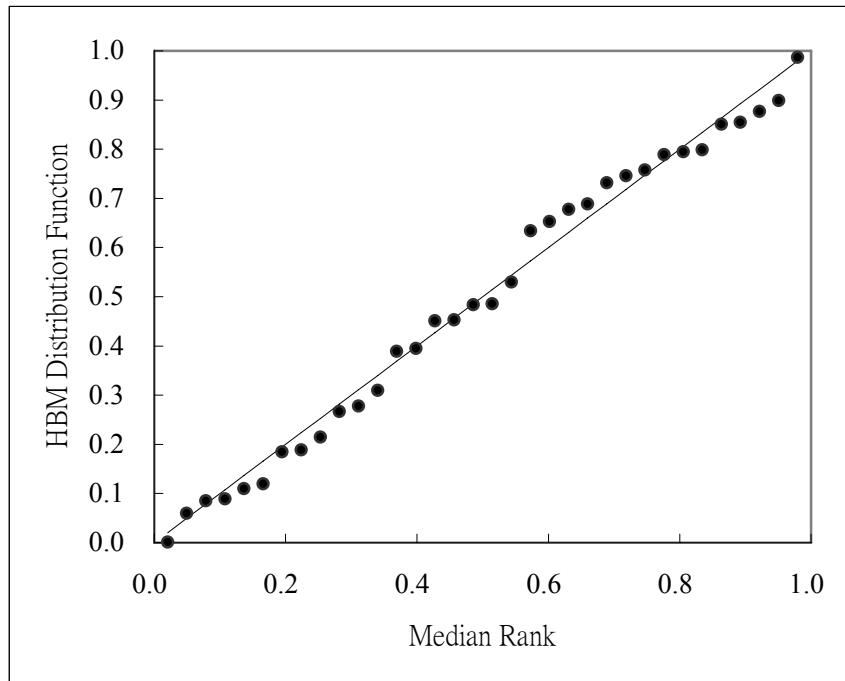


圖 8(a). 30 個物件衰退時間真實值之 P-P 圖

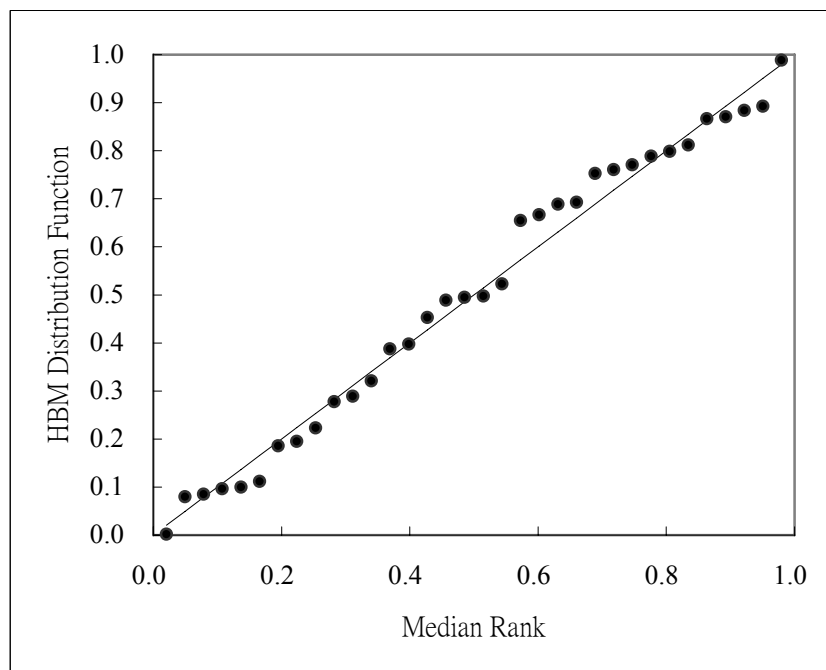


圖 8(b). 30 個物件衰退時間預測值之 P-P 圖

### 三、可靠度區間之估計

對於反高斯分配的情況下，產品的可靠度函數可以整理如下：

$$R(t; \theta, \lambda) = 1 - F(t; \theta, \lambda) = \Phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(1 - \frac{t}{\theta}\right)\right] - \exp\left(\frac{2\lambda}{\theta}\right)\Phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(1 + \frac{t}{\theta}\right)\right] \quad (20)$$

而針對這樣的分配假設，學者 Padgett 曾在 1979 年計算出當其位置參數及形狀參數未知時，其可靠度之近似區間。事實上，對於反高斯函數而言，由於  $R(t)$  對於參數的關係並非單調 monotone 上升或下降，因此便無法求得  $R(t)$  之等效(equivalent)信賴區間(Tang and Chang, 1994a)。而為了解決這樣的問題 Tang and Chang (1994a, 1994b)曾提出一個比較保守的方式來估計  $R(t)$  的信賴區間，其做法乃根據參數之信賴區間估計來求得信賴度為  $(1 - \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2)$  的可靠度區間。依其方法及根據  $\lambda = \beta\theta$  的關係，我們可以針對失效時間預測值進行 90.25% 的可靠度區間估計，其估計結果可以彙整如下：

- (a) 在  $\lambda$  參數之信賴區間為  $[5.9485E07, 1.6045E08]$  之下，對於某固定  $t$ ，其最小化之可靠度為  $R(t; 2.4831E05, \lambda)$ 。
- (b) 在  $\lambda$  參數之信賴區間為  $[5.9485E07, 1.6045E08]$  之下，對於某固定  $t$ ，其最大化之可靠度為  $R(t; 2.5814E05, \lambda)$ 。

最後根據上述之(a)及(b)我們便可得到可靠度之上限及下限值，其結果可以彙整如圖 9。

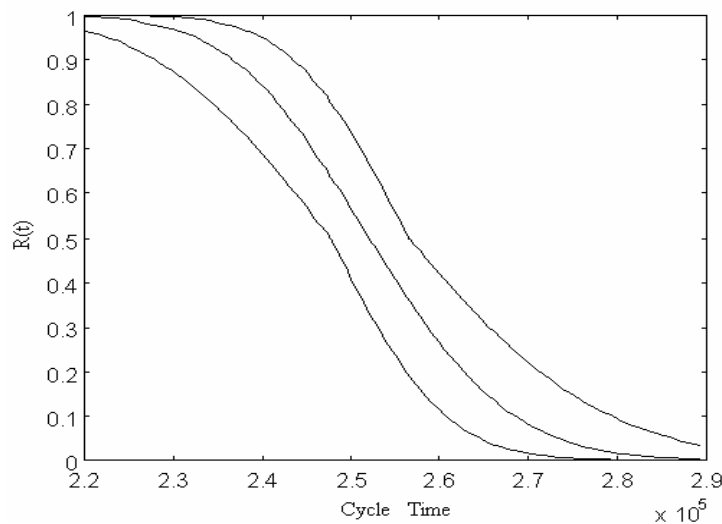


圖 9.  $R(t)$  的預測衰退時間及其 90.25% 信賴區間

## 陸、總結

在這篇論文中，我們利用層級貝氏模式來建構衰退時間的可靠度預測模式；在層級貝氏模式的建構程序中，我們使用了MCMC方法中的Gibbs Sampler技術來協助我們進行參數的估計(Gelfand and Smith 1990)。由於層級貝氏模式可以準確的預測失效時間並反應出真實資料的情況，故正確的失效時間機率分配可成功的被估計出來。此外，藉由 $\beta_i$ 參數的假設，我們可以運用層級貝氏模式及MCMC方法正確的辨識並估計出每個板子的異質性；進而利用其說明並探討每個板子在其製造程序中是否有任何的問題產生。最後藉由上述機率分配的推估我們可以進一步的進行衰退實驗中可靠度的預測，例如失效率、容忍上限等。此外，對於一些高可靠度的產品而言，由於其品質的提升促使我們無法再延用傳統的壽命實驗方法在短時間內推估出其準確的產品可靠度，適時我們將需要利用加速實驗來進行衰退測試，而此種實驗下的衰退程序往往非常複雜，常造成個別產品異質性辨識及估計的困難，但藉由此篇論文中所使用的層級貝氏模式及其他加速應力因子變數(covariate)的考量，我們將可以順利的建構其可靠度量測模式並提供此問題的解決程序。最後由於在本篇論文當中，我們所建構的可靠度預測模式其資料結構與longitudinal model或repeated measurement的問題類似，因此在估計方法上除了使用層級貝氏技術外，亦可使用mixed model或其他的方法進行估計並比較。未來之研究當可就此進行更深入的探討。

## 參考文獻

- 邱建賢，2003，使用初始衰變資料對高可靠度產品壽命分配及其參數估計之比較，國立清華大學統計學研究所碩士論文。
- Akama M., 2002, "Bayesian analysis for the results of fatigue test using full-scale models to obtain the accurate failure probabilities of the Shinkansen vehicle axle," **Reliability Engineering and System Safety**, Vol. 75, 321-332.
- Bogdanoff, J.L., and Kozin, F., 1984, **Probabilistic Models of Cumulative Damage**, N. Y.: John Wiley & Sons, Inc.
- Carlin, B. P. and Louis, T. A., 2000, **Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis**, London, UK: CRC Press.
- Doksum K. A. and Hoyland A., 1992, "Models for Variable-Stress Accelerated Life Testing Experiments based on Wiener Processes and the Inverse Gaussian Distribution,"



- Technometrics**, Vol. 34, 74-82.
- Gelfand, Alan E. and Adrian F. M. Smith, 1990, "Sampling-Based Approaches to Calculating Marginal Densities," **Journal of the American Statistical Association**, Vol. 85, 398-409.
- Geman, S. and Geman, D., 1984, "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images," **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, PAMI-6, 721-741.
- Liski, E.P., and Nummi, T., 1996, "Prediction in Repeated-Measures Models With Engineering Applications," **Technometrics**, Vol.38, 25-36.
- Lu, J.C. and Meeker, W.Q., 1993, "Using Degradation Measures to Estimate a Time-to-Failure Distribution," **Technometrics**, Vol. 35, No. 2, 161-174.
- Lu, J.C and Meeker, W.Q., and Escobar, L.A., 1996, "A Comparison of Degradation and Failure Distribution Analysis Methods of Estimating a Time-to-Failure Distribution," **Statistic Sinica**, Vol. 6, 531-546.
- Meeker, W.Q., and Escobar, L.A., 1993, "A Review of Recent Research and Current Issue in Accelerated Testing," **International Statistical Review**, Vol. 61, 147-168.
- Meeker, W.Q., and Escobar, L.A., 1998, **Statistical Methods for Reliability Data**, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc.
- Meeker, W.Q., and Hamada, M., 1995, "Statistical Tools for the Rapid Development & Evaluation of High Reliability Product," **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 44, 187-198.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H., and Teller, E., 1953, "Equations of State Calculations by Fast Computing Machines," **Journal of Chemical Physics**, Vol. 21, 1087-1091.
- Nelson, W., 1990, **Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses**, N. Y.: John Wiley & Sons, Inc.
- Tang, L.C. and Chang, D. S., 1995, "Reliability Prediction Using Nondestructive Accelerated-Degradation data: Case Study on Power Supplies," **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 44, 562-566.
- Padgett, W. J., 1979, "Confidence Bounds on Reliability for the Inverse Gaussian Model," **IEEE Transactions on Reliability**, Vol. 28, 165-168.
- Zhang R. & Mahadevan S., 2000, "Model uncertainty and Bayesian updating in reliability-based inspection," **Structural Safety**, Vol. 22, 145-160.

## 附錄 A. Markov chain Monte Carlo 在衰退性裂縫資料之估計

估計的方式乃依據下列推導之分配循序產生隨機變數值

1. 產生  $\beta_i$

$$\begin{aligned} [\beta_i | rest] &\propto [t_i | Y_i, \beta_i, \sigma^2, \rho_i] \times [\beta_i | \bar{\beta}, V_\beta] \\ &\propto \det(\Sigma_i)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(t_i - Y_i \beta_i)' \Sigma_i^{-1} (t_i - Y_i \beta_i)\right\} \times N_3[\beta_i | \bar{\beta}, V_\beta] \\ &\propto \frac{\sqrt{1-\rho_i^2}}{\sigma^{n_i}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(t_i^* - Y_i^* \beta_i)' (t_i^* - Y_i^* \beta_i)\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta_i - \bar{\beta})' V_\beta (\beta_i - \bar{\beta})\right\} \\ &\propto N_3(\beta_i | U_{n_i}, V_{n_i}) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} V_{n_i} &= [Y_i^* Y_i^* / \sigma^2 + V_\beta^{-1}]^{-1} & U_{n_i} &= V_{n_i} [Y_i^* t_i^* / \sigma^2 + V_\beta^{-1} \bar{\beta}] \\ E(\varepsilon_i \varepsilon_i') &= \Sigma_i = \frac{\sigma^2}{1-\rho_i^2} \gamma_i & \gamma_i &= \begin{bmatrix} 1 & \rho_i & \rho_i^2 & \dots & \rho_i^{t_i-1} \\ \rho_i & 1 & \rho_i & \dots & \rho_i^{t_i-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \rho_i^{t_i-1} & \rho_i^{t_i-2} & \rho_i^{t_i-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ t_{i,1}^* &= (1-\rho_i) t_{i,1} & t_{i,j}^* &= t_{i,j} - \rho_i t_{i,j-1} \text{ for } j=2, \dots, n_i \\ Y_{i,1}^* &= (1-\rho_i) Y_{i,1} & Y_{i,j}^* &= Y_{i,j} - \rho_i Y_{i,j-1} \text{ for } j=2, \dots, n_i \end{aligned}$$

$$t_i^* = \begin{bmatrix} t_{i,1}^* \\ t_{i,2}^* \\ \vdots \\ t_{i,n_i}^* \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad Y_i^* = \begin{bmatrix} Y_{i,1}^* \\ Y_{i,2}^* \\ \vdots \\ Y_{i,n_i}^* \end{bmatrix} \quad Y_i = [1 \quad y_i \quad \ln y_i]$$

2. 產生  $\bar{\beta}$

$$\begin{aligned} [\bar{\beta} | rest] &\propto \prod_{i=1}^N [\beta_i | \bar{\beta}, V_\beta] \times [\bar{\beta}] \\ &\propto \prod_{i=1}^N N_3[\beta_i | \bar{\beta}, V_\beta] \times N_3[\bar{\beta} | \alpha, V_\alpha] \\ &\propto N_3[\bar{\beta} | \alpha n, V_{\alpha n}] \end{aligned}$$

其中

$$V_{\alpha n} = [N \cdot V_\beta^{-1} + V_\alpha^{-1}]^{-1} \quad \alpha n = V_{\alpha n} \cdot [V_\alpha^{-1} \alpha + \sum_{i=1}^N V_\beta^{-1} \beta_i]$$

3. 產生  $V_\beta$

$$\begin{aligned} [V_\beta | rest] &\propto \prod_{i=1}^N [\beta_i | \bar{\beta}, V_\beta] \times [V_\beta] \\ &\propto \prod_{i=1}^N N_3[\beta_i | \bar{\beta}, V_\beta] \times IW_3[V_\beta | f_0, G_0] \\ &\propto IW_3[V_\beta | f_n, G_n] \end{aligned}$$

其中

$$f_n = N + f_0 \quad G_n = \sum_{i=1}^N (\beta_i - \bar{\beta})(\beta_i - \bar{\beta})' + G_0$$

4. 產生  $\sigma^2$

$$[\sigma^2 | rest] \propto \prod_{i=1}^N [t_i | Y_i, \beta_i, \sigma^2, \rho_i] \times [\sigma | r_0, s_0]$$

運用層級貝氏方法建構以失效測量為基礎的可靠度預測模式

$$\begin{aligned}
 &\propto \prod_{i=1}^N \det(\Sigma_i)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(t_i - Y_i \beta_i)' \Sigma_i^{-1} (t_i - Y_i \beta_i)\right\} \times \text{IG}\left[\sigma^2 \left|\frac{r_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right.\right] \\
 &\propto \prod_{i=1}^N \frac{\sqrt{1-\rho_i^2}}{\sigma^{n_i}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(t_i^* - Y_i^* \beta_i)' (t_i^* - Y_i^* \beta_i)\right\} \times \text{IG}\left[\sigma^2 \left|\frac{r_0}{2}, \frac{s_0}{2}\right.\right] \\
 &\propto \text{IG}\left(\sigma^2 \left|\frac{r_n}{2}, \frac{s_n}{2}\right.\right)
 \end{aligned}$$

其中

$$r_n = r_0 + \sum_{i=1}^N n_i \quad s_n = s_0 + \sum_{i=1}^N \left[ (t_i^* - Y_i^* \beta_i)' (t_i^* - Y_i^* \beta_i) \right]$$

5. 產生  $\rho_i$

$$\begin{aligned}
 [\rho_i | rest] &\propto [t_i | Y_i, \beta_i, \sigma^2, \rho_i] \times [\rho_i] \\
 &\propto \det(\Sigma_i)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(t_i - Y_i \beta_i)' \Sigma_i^{-1} (t_i - Y_i \beta_i)\right\} \times U[\rho_i | -1, 1] \\
 &\propto \frac{\sqrt{1-\rho_i^2}}{\sigma^T} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ (1-\rho_i^2) r_{i,1}^2 + \sum_{j=1}^{n_i} (r_{i,j} - \rho_i r_{i,j-1})^2 \right]\right\} \times I(-1 < \rho_i < 1) \\
 &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \rho_i^2 \left( \sum_{j=2}^{n_i} r_{i,j}^2 \right) - 2\rho_i^2 \left( \sum_{j=2}^{n_i} r_{i,j} r_{i,j-1} \right) \right]\right\} \times \sqrt{1-\rho_i^2} I(-1 < \rho_i < 1) \\
 &\propto \sqrt{1-\rho_i^2} N(\rho_i^2 | a, b^2) \cdot I(-1 < \rho_i < 1)
 \end{aligned}$$

其中

$$r_{i,j} = t_{i,j} - Y_{i,j}' \beta_i \quad a = \frac{\sum_{j=2}^{n_i} r_{i,j} r_{i,j-1}}{\sum_{j=2}^{n_i} r_{i,j}^2} \quad b^2 = \sigma^2 \left( \sum_{j=2}^{n_i} r_{i,j}^2 \right)^{-1}$$

## 附錄 B. Markov chain Monte Carlo 在失效時間分配上之估計

估計的方式乃依據下列推導之分配循序產生隨機變數值

### 1. 產生 $\theta$

$$\begin{aligned} [\theta|rest] &\propto [t_i|\theta, \beta] \cdot [\theta] \\ &\propto \left(\frac{\beta\theta}{2\pi}\right)^{2n} \prod_{i=1}^N t_i^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\beta}{2\theta} \sum_{i=1}^N \frac{(t_i-\theta)^2}{t_i}\right) N(u_0, V_0) \\ &\propto \theta^{\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{\beta}{2\theta} \sum_{i=1}^N t_i - \theta \left(\frac{\beta}{2\sum_{i=1}^N t_i} - 2\mu_0\right) - \theta^2\right) \end{aligned}$$

我們使用 Metropolis-Hastings with random walk chain 之方式產生隨機變數值。其中，我們先令  $\theta^{(p)}$  代表前一次的隨機變數值，之後的隨機變數值便可在給定接受機率為  $\alpha$  (如方程式 B1) 的條件下，表示為  $\theta^{(p+1)} = \theta^{(p)} + \Delta\theta^{(p+1)}$ 。

$$\alpha(\theta^{(p+1)}, \theta^{(p)}) = \min \left[ \frac{\theta^{(p+1)\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{\beta}{2\theta^{(p+1)}} \sum_{i=1}^N t_i - \theta^{(p+1)} \left(\frac{\beta}{2\sum_{i=1}^N t_i} - 2\mu_0\right) - \theta^{(p+1)2}\right)}{\theta^{(p)\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{\beta}{2\theta^{(p)}} \sum_{i=1}^N t_i - \theta^{(p)} \left(\frac{\beta}{2\sum_{i=1}^N t_i} - 2\mu_0\right) - \theta^{(p)2}\right)}, 1 \right] \quad (B 1)$$

運用層級貝氏方法建構以失效測量為基礎的可靠度預測模式

此外，有關  $\Delta\theta^{(p+1)}$  值是根據 Normal(0, 10000)來產生。而依據這樣機率密度函數所產生的隨機變數值將可確保其接受機率大於 30%。

## 2. 產生 $\beta$

$$[\beta|rest] \propto [t_i|\theta, \beta] \cdot [\beta]$$

$$\propto \left(\frac{\beta\theta}{2\pi}\right)^{2n} \prod_{i=1}^N t_i^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\beta}{2\theta} \sum_{i=1}^N \frac{(t_i - \theta)^2}{t_i}\right) \frac{\left(\frac{S_0}{2}\right)^{\frac{r_0}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r_0}{2}\right)} \beta^{-\left(\frac{r_0}{2}+1\right)} \exp\left(-\frac{S_0}{\beta}\right)$$

$$\propto \beta^{-\left(\frac{r_0}{2}-\frac{N}{2}+1\right)} \exp(\beta C_1 + \frac{C_2}{\beta})$$

其中  $C_1 = -\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^N \frac{(t_i - \theta)^2}{t_i}$  and  $C_2 = -\frac{S_0}{2}$

相同的，我們使用 Metropolis-Hastings with random walk chain 之方式產生  $\beta$  的隨機變數值。其中，我們先令  $\beta^{(p)}$  代表前一次的隨機變數值，之後的隨機變數值便可在給定接受機率為  $\alpha$  (如方程式 B2) 的條件下，表示為  $\beta^{(p+1)} = \beta^{(p)} + \Delta\beta^{(p+1)}$ 。

$$\alpha(\beta^{(p+1)}, \beta^{(p)}) = \min \left[ \frac{\beta^{(p+1)-\left(\frac{r_0}{2}-\frac{N}{2}+1\right)} \exp(\beta^{(p+1)} C_1 + \frac{C_2}{\beta^{(p+1)}})}{\beta^{(p)-\left(\frac{r_0}{2}-\frac{N}{2}+1\right)} \exp(\beta^{(p)} C_1 + \frac{C_2}{\beta^{(p)}})}, 1 \right] \quad (B 2)$$

此外，有關  $\Delta\beta^{(p+1)}$  值是根據 Normal(0, 100000)來產生。而依據這樣機率密度函數所產生的隨機變數值將可確保其接受機率大於 30%。

## 作者簡介

### 邱志洲

美國 Texas A&M University 工業工程博士，現為國立台北科技大學商業自動化及管理研究所教授，專長為顧客關係管理、資料探勘、人工智慧方法等。研究論文曾發表於 Applied Artificial Intelligence、International Journal of Systems Science、International Journal of Industrial Engineering、Asia Pacific Journal of Finance、Quality and Reliability Engineering International、IIE Transactions、Computers and Industrial Engineering、工業工程學刊、亞太管理評論、工業工程學刊、台大管理論叢等國內外期刊。

### 游濬遠

國立台北科技大學商業自動化及管理研究所碩士，現為國立交通大學經營管理所博士生。

### 廖子毅

國立台北科技大學商業自動化及管理研究所碩士，現為國立成功大學工業與資訊管理系博士生。

### 高凌菁

現為美國 Santa Clara University 行銷學系助理教授。

